Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2016-2017, Introduction aux probabilités

# Feuille de TD n°6 : lois de couples, lois conditionnelles

**Exercice 1** Soient $X$ et $Y$ deux variables aléatoires dont les lois sont données par

$$\begin{array}{ll} P(X=1)=0.6 & P(Y=1)=0.4 \\ P(X=2)=0.2 & P(Y=2)=0.5 \\ P(X=3)=0.2 & P(Y=3)=0.1 \end{array}$$

1. La loi du couple $(X, Y)$ est donnée par l'un des tableaux suivants. Lequel ?

A

| y \ x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0 | 0.1 |
| 2 | 0.2 | 0.1 | 0 |
| 3 | 0.1 | 0 | 0 |

B

| y \ x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.5 | 0 | 0.1 |
| 2 | 0 | 0.1 | 0 |
| 3 | 0.1 | 0 | 0 |

C

| y \ x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 0.2 | 0.1 | 0.1 |
| 2 | 0.3 | 0.1 | 0.1 |
| 3 | 0.1 | 0 | 0 |

D

| y \ x | 1 | 2 | 3 |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 0 | 0 |
| 2 | 0 | 1 | 0 |
| 3 | 0 | 0 | 1 |

2. Quel serait le tableau de la loi du couple $(X, Y)$ si les variables $X$ et $Y$ étaient indépendantes ?
3. Parmi les autres tableaux, déterminer lesquels peuvent correspondre à la loi d'un couple de variables. Lorsque c'est le cas, donner les lois marginales correspondantes.

**Exercice 2** On lance $n$ fois un dé à six faces et on note : $X$ le nombre de fois que l'on obtient un résultat pair, et $Y$ le nombre de fois que l'on obtient un résultat inférieur ou égal à 3.

1. Quelles sont les lois de $X$ et $Y$ ?
2. Calculer $P(X = 0, Y = 0)$. Les variables $X$ et $Y$ sont-elles indépendantes ?
3. Pour $n = 1$, déterminer la loi du couple $(X, Y)$ (on donnera les résultats sous forme de tableau)

**Exercice 3** On lance deux fois un dé à six faces. Les deux lancers sont supposés indépendants. On note $X$ le plus petit résultat obtenu et $Y$ le plus grand.

1. Calculer la loi du couple $(X, Y)$ et présenter le résultat sous forme d'un tableau. En déduire les lois marginales (lois de $X$ et $Y$).
2. $X$ et $Y$ sont-elles des variables indépendantes ?

**Exercice 4** On s'intéresse au nombre de voitures passant par un péage d'autoroute durant une journée. Le nombre de véhicules allant de Paris vers Lyon suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda$ et le nombre de véhicules allant de Lyon vers Paris suit une loi de Poisson de paramètre $\mu$. Ces deux variables sont supposées indépendantes.
Sachant que $n$ véhicules ont franchi le péage, quelle est la probabilité pour que $k$ d'entre eux viennent de Paris ? Reconnaître la loi obtenue.

**Exercice 5** Soit $X, Y$ deux variables aléatoires positives indépendantes qui ont une espérance et une variance finie.

1. A votre avis, les variables $X$ et $X+Y$ sont-elles positivement corrélées (sans calcul) ? Calculer leur corrélation.
2. On suppose que $X$ et $Y$ sont identiquement distribuées, c'est-à-dire de même loi.
   (a) Les variables $X-Y$ et $X+Y$ sont-elles positivement corrélées ?
   (b) Sont-elles indépendantes en général (on pourra considérer par exemple le cas de variables binomiales) ?

**Exercice 6** On considère que sur un groupe de TD de $n$ étudiants, il y a en moyenne $0,5n$ étudiants qui passent la matière, et en moyenne $0,7 \cdot n$ qui possèdent un smartphone dernière génération. On considère que sur la promotion 2016-2017, chaque étudiant est indépendant des autres, et on appelle $p$ la probabilité qu'il réussisse ET qu'il ait un smartphone.

1. Que vaudrait $p$ si le fait de réussir était indépendant du fait d'avoir un smartphone ?
2. On observe qu'en moyenne, sur un groupe de 20 étudiants, 6 réussissent et ont un smartphone. Que vaut $p$ ?
3. Quelle est la corrélation entre le nombre d'étudiants qui réussisent et le nombre qui ont un smartphone sur un groupe de 20 étudiants ? (on pourra écrire les variables binomiales comme des sommes de variables de Bernoulli indépendantes) Est-ce que ça vous semble significatif ?

**Exercice 7**
1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $(X_1, \ldots, X_n)$ des variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $p \in ]0,1[$. Soit $(Y_1, \ldots, Y_n)$ des variables indépendantes de Bernoulli de paramètre $q \in ]0,1[$. Pour $1 \leq i \leq n$, on pose

$$Z_i = \begin{cases} 1 \text{ si } X_i = 1 \text{ et } Y_i = 1, \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

   Quelles sont les lois des variables $Z_i$ ? Les variables $Z_i$ sont-elles indépendantes ?
2. On suppose que $X$ est régie par une loi binomiale de paramètres $n$ et $p$, et que pour chaque $k$ fixé (avec $0 \leq k \leq n$), la loi conditionnelle de $Y$ sachant $X = k$ est une loi binomiale de paramètres $k$ et $q$. Déterminer la loi de $Y$.
3. Deux tests de détection d'une maladie sont disponibles. Le premier déclare malade un individu sain avec probabilité $p$, le second avec probabilité $q$. Si un individu est déclaré malade par le premier test on pratique le second. Sur un groupe de $n$ personnes saines quelle est la loi du nombre de personnes déclarées malades à tort ?

**Exercice 8** Une secrétaire donne $n$ appels téléphoniques ($n \geq 1$ est fixé). A chaque appel, la probabilité de joindre son correspondant est $p \in ]0,1[$. On suppose que les résultats sont indépendants. Après ces premiers appels, le lendemain, elle rappelle les correspondants qu'elle n'a pas pu joindre. Soit $X$ le nombre de personnes jointes le premier jour et $Y$ le nombre total de personnes jointes.

1. Quelle est la loi de $X$ ? Déterminer aussi pour $h \leq k \leq n$ la valeur de $\mathbb{P}(Y = k | X = h)$.
2. En déduire la loi de $Y$.