Université Paris Descartes
UFR de Mathématiques et Informatique

Licence 2ème année, 2016-2017, parcours Informatique, Introduction aux probabilités

# Feuille de TD n°5 : Loi de Poisson, loi exponentielle, lois à densité

## Loi de Poisson

**Exercice 1** Dans la mémoire d'un ordinateur il se peut que certains "bit" enregistrés soient inexacts. Ce phénomène étant rare on suppose que le nombre de "bit" erronés suit une loi de Poisson. Cependant il est plus fréquent de voir apparaître un 0 à la place d'un 1 que le contraire. Soit $X_1$ le nombre de faux 0 et $X_2$ le nombre de faux 1. On suppose ces variables indépendantes et de loi de Poisson de paramètres respectifs $\lambda_1$ et $\lambda_2$, avec $\lambda_1 > \lambda_2$.

1. Quelle est la loi du nombre total d'erreurs ?
2. Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $n$ erreurs ont été commises. Soit $X$ le nombre de faux 0. Quelle est la loi de $X$ ?

**Exercice 2** Dans un bureau de poste, il y a 10 guichets. En une journée, le nombre de clients qui se présentent à ce bureau de poste est une v.a. $X$, de loi de Poisson de paramètre $\lambda$, $\lambda$ réel strictement positif. On suppose que les clients choisissent au hasard un guichet, de façon indépendante. Soit $Y$ le nombre de clients qui choisissent le guichet 1.

1. Soit $n \geqslant 1$. On suppose que $X = n$. Dans ce cas, quelle loi suit la variable $Y$ ?
2. En déduire la loi de $Y$ et calculer $\mathbb{E}(Y)$ (On ne suppose plus $X = n$).

## Loi exponentielle

**Exercice 3**
Il est courant d'utiliser la loi exponentielle comme loi de durée de vie d'un matériel électronique. Soit $\lambda > 0$, et $X$ une variable de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ .

1. Donner la fonction de répartition de $X$, son espérance et sa variance.
2. Calculer $P(X \geq t + s | X \geq t)$, pour $s, t > 0$.
3. On dispos de deux machines dont la durée de vie est une loi exponentielle de même paramètre. L'un est tout neuf alors que l'autre a vécu déjà 5 ans. Lequel a le plus de flancher lors de la prochaine année ? Pourquoi dit-on que la loi exponentielle est sans mémoire ?

**Exercice 4** Un matériel comprend $n$ composants dont les durées de vie (temps écoulé avant une panne) $X_i$ sont supposées indépendantes et de lois $\mathcal{E}(\lambda_i)$, $1 \leq i \leq n$. Le matériel tombe en panne dès que l'un de ses composants est en panne. On note $Y$ la durée de vie de ce matériel.

1. Calculer la fonction de répartition de $Y$.
2. Quelle est la loi de $Y$ , son espérance et sa variance ?

3. On suppose qu'un ordinateur a 5 composants cruciaux, qui ont chacun une durée de vie moyenne de 10 ans. Selon le modèle précédent, quelle est la durée de vie moyenne de l'ordinateur ?

**Exercice 5** Soit $X$ une variable aléatoire de loi $\mathcal{E}(\lambda)$ . On définit la variable $Y = [X] + 1$, la partie entière de $X + 1$, c'est-à-dire l'entier immédiatement supérieur ou égal à $X$.

1. Quelle est la loi de $Y$ ?
2. Soit $k, l \in \mathbb{N}$. Que peut-on dire de $P(Y \geq k + l \mid Y \geq k)$ ? Commenter.
3. Donner la moyenne et la variance de cette loi.

**Loi quelconque**

**Exercice 6** Soit $X$ une variable aléatoire dont la densité de probabilité est donnée par :

$$f_X(x) = \begin{cases} cx \text{ si } x \in [0, \frac{1}{2}[, \\ c(1-x) \text{ si } x \in [\frac{1}{2}, 1], \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

1. Que vaut $c$ ? Représenter sur un graphique la fonction $f_X$.
2. Calculer et représenter la fonction de répartition de $X$.
3. En déduire $P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$ et $P(\frac{3}{4} \leq X \leq \frac{5}{4})$.

**Exercice 7** Soit $X$ une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par :

$$\begin{cases} 0 \ \text{ si } \ x < 0, \\ \frac{x}{2} \ \text{ si } \ x \in [0, 1[, \\ 1 \ \text{ si } \ x \geq 1. \end{cases}$$

1. Représenter le graphe de $X$.
2. Montrer que $X$ n'est pas une variable discrète.
3. Montrer que $X$ n'est pas une variable à densité.

**Exercice 8** Pour quelles valeurs de $c$ les fonctions suivantes sont-elles des densités de probabilité ? Calculer leur espérance et leur variance quand cela est possible.

1. $f_1(x) = cx^k, \ 0 \leq x \leq 1, \ k \in \mathbb{N}^*$.
2. $f_2(x) = ce^{-|x|}, \ x \in \mathbb{R}$.

**Exercice 9** On observe au cours du temps la suite des variables $(X_i)_{i\geq 1}$qui sont indépendantes et de fonction de répartition commune $F$.

1. Quelle est la fonction de répartition de la variable $Y_n = \max\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ ?
2. Celle de la variable $Z_n = \min\{X_i, 1 \leq i \leq n\}$ ?