Chaînes de Markov (et applications)

Raphael Lachieze-Rey*

26 janvier 2017

M1 Paris Descartes.

Table des matières

*lr.raphael@gmail.com

Ressource d'exercices en ligne :
`http://wims.unice.fr/wims/fr_U2~proba~oefmarkov.fr.html`
En noir : l'essentiel
En magenta : exemples, explications, exercices...

Rappels

0.1 Espérances et probas conditionnelles

On rappelle la formule de probabilités conditionnelles : $\mathbb{P}(A|B) = \mathbb{P}(A \cap B)/\mathbb{P}(B)$, pour $\mathbb{P}(B) \neq 0$. On note parfois $\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B)$, rappelons que $\mathbb{P}_B(\cdot)$ est une mesure de probabilités à part entière.

Le double conditionnement se traite ainsi :

$$\mathbb{P}(A\cap B\cap C) = \mathbb{P}(A\cap B|C)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_C(A\cap B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}_C(A|B)\mathbb{P}_C(B)\mathbb{P}(C) = \mathbb{P}(A|B,C)\mathbb{P}(B|C)\mathbb{P}(C).$$

Autrement dit,

$$\text{``}\mathbb{P}(A|B|C)'' = \mathbb{P}(A|B\cap C)$$

Etant donné des variables aléatoires X et Y,

$$\mathbb{E}(X|Y) = \varphi(Y)$$

est une variable aléatoire qui est entièrement déterminée par Y. Par exemple, si X, Y sont des variables de Bernoulli de paramètre $1/2$ indépendantes,

$$\mathbb{E}((X+Y)^2|Y) = \mathbb{E}(X^2|Y) + 2\mathbb{E}(XY|Y) + \mathbb{E}(Y^2|Y) = \mathbb{E}X^2 + 2Y\mathbb{E}X + Y^2 = \frac{1}{2} + Y + Y^2 = \varphi(Y).$$

0.2 Familles sommables et théorème de Fubini

Etant donné un espace mesuré (Ω, μ) et une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$, on ne peut pas toujours donner un sens à

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx),$$

cette quantité n'a de sens que si

$$\int_\Omega |f(x)|\mu(dx) < \infty$$

c'est-à-dire si f est intégrable. (exemple de $x \mapsto \frac{\sin(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}$). Par contre, si $f \geqslant 0$, alors

$$\int_\Omega f(x)\mu(dx) \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$$

est défini sans ambiguité. De même, étant donné une série $(a_n; n \in \mathbb{N})$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

n'a de sens que si $a_n \geqslant 0$ ou si $(a_n; n \geqslant 0)$ est sommable, c'est-à-dire

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n| < \infty.$$

Pour ce qui est de l'interversion, le théorème de Fubini nous dit que pour une fonction bi-mesurable $f(x, y)$ sur un produit d'espaces mesurés $\Omega \times \Omega'$,

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} f(x, y) \mu(dx) \right) \mu'(dy) = \int_{\Omega'} \left(\int_{\Omega} f(x, y) \mu'(dy) \right) \mu(dx)$$

n'est vrai que si $f(x, y) \geqslant 0$ ou si

$$\int_{\Omega \times \Omega'} |f(x, y)| \mu(dx) \mu'(dy) < \infty$$

ou si, de manière équivalente,

$$\int_{\Omega} \left(\int_{\Omega'} |f(x, y)| \mu(dx) \right) \mu(dy) < \infty.$$

Les fonctions positives peuvent être intégrées dans l'ordre qu'on veut. Si μ est une mesure de probabilité, $\Omega' = \mathbb{N}$ et μ' est la mesure de comptage, ça nous donne

$$\mathbb{E} \sum_{n \in \mathbb{N}} f(\omega, n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} f(\omega, n)$$

sans besoin de justification si $f(\omega, n) \geqslant 0$, ou si

$$\mathbb{E} \sum_{n \in \mathbb{N}} |f(\omega, n)| = \sum_{n \in \mathbb{N}} \mathbb{E} |f(\omega, n)| < \infty.$$

1 Chaînes de Markov homogènes

$(\Omega, \mathbb{P})$ est un espace probabilisé.

1.1 Exemples et définitions

Idée : Une chaîne de Markov est une suite d'événements aléatoires dans le temps ou **conditionnellement au présent, le futur ne dépend pas du passé**, ou autrement dit le futur ne dépend du passé que par le présent.

Exercice 1.
Parmi les exemples suivants, lesquels correspondent a une chaîne de Markov ?

- Les records du monde du 100m
- La population mondiale
- La position d'une voiture (car le passé nous renseigne sur sa vitesse, et donc sur sa position future)
- Le nombre de personnes dans une file d'attente
- Un marcheur aléatoire qui ne revient jamais sur ses pas.
- Le couple (position, vitesse) d'une voiture de course
- une marche aléatoire

Définition 1. *Formellement, soit E un espace fini ou dénombrable. Ce sera l'***espace d'états**. *Soit $X = \{X_n; n \geq 0\}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans E. On dit que X est une chaîne de Markov si, pour tout $x_1, \dots, x_{n+1} \in E$, on a*

$$\mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = x_{n+1}}_{\text{Le futur}} \mid \underbrace{X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n}_{\text{Le passé (et le présent)}}) = \mathbb{P}(\underbrace{X_{n+1} = x_{n+1}}_{\text{Le futur}} \mid \underbrace{X_n = x_n}_{\text{Le présent}})$$

Cette propriété des chaînes de Markov est aussi connue comme **propriété de Markov**.

Exemple 1. Modélisation

- Séquence d'ADN : ACGGTAACTC... peut-être vue en première approximation comme une chaine de Markov
- Evolution de population : Chaque jour, un individu nait ou un individu meurt
- Généalogie/Epidémiologie : Chaque jour, un individu donne naissance (ou contamine) un nombre aléatoire d'individu, ou meurt (guérit)
- Intelligence artificielle : Le programme Alpha Go modélise le jeu de go comme une chaîne de Markov, et évalue les probabilités de jeu de son adversaire, en explorant plus les branches les plus probables (Markov tree).
- Simulation. Exemple : jeu de cartes mélangé. On part d'un jeu de cartes (fictif) dans l'ordre, et à chaque coup on applique l'interversion de 2 cartes tirées au hasard. La "loi" du jeu de cartes converge vers la loi d'un jeu de cartes mélangé selon une permutation uniforme

Les questions auxquelles on va tenter de répondre dans ce cours :

- Conaissant la loi de X_0, quelle est la loi de $X_n, n \in \mathbb{N}$? La loi de X_n converge-t-elle ?
- Partant d'un certain $x \in E$, et pour $y \in E$, quelle est la proba que la chaine passe par y, i.e. qu'il existe un temps $T < \infty$, aléatoire, pour que $X_T = y$? Quel est l'espérance de T ?
- ...

Exercice 2. Soit $R_n, n \geq 0$ des variables indépendantes à valeurs dans $E = \mathbb{N}$. Montrer que $S_n = \sum_{i=1}^n R_i$ et $P_n = \prod_{i=1}^n R_i$ sont des chaînes de Markov.

Une chaîne de Markov peut être vue comme un **système dynamique**, ce qui veut dire que $X_{n+1} = f_n(X_n)$, ou f_n est une "transformation aléatoire" indépendante du passé. Dans l'exemple précédent, $f_n(X_n)$ est la somme (ou le produit) de X_n avec R_{n+1}.

Si la transformation aléatoire f_n ne dépend pas de n, i.e. $X_{n+1} = f(X_n)$ pour tout n pour une certaine transformation f, on dit que X est une **chaîne de Markov homogène**.

Cela veut dire que si à un certain instant $n \geq 0$ la chaîne se trouve à l'état x ($X_n = x$), alors la probabilité qu'elle se trouve à l'état y au temps $n+1$ est la même que si l'on était au temps initial.

Définition 2. *Une chaîne de Markov est homogène si pour tout $n \geq 0$, x et y dans E*

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y \,|\, X_n = x) = \mathbb{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x).$$

Dans ce cas, on pose

$$Q(x, y) = \mathbb{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x),\ x, y \in E.$$

Q est la **matrice de transition** *de la chaîne X.*

Dans ce cours, toutes les chaîne de Markov sont supposées homogènes.

Remarque 1. *C'est éventuellement une matrice infinie*

Une chaîne de Markov homogène "saute" donc aléatoirement d'états en états, et la probabilité de chaque saut est donnée par la matrice Q.

Exemple 2. Une grenouille monte sur une échelle. Chaque minute, elle peut monter d'un barreau avec probabilité $1/2$, ou descendre d'un barreau avec probabilité $1/2$. L'échelle a 5 barreaux. Si la grenouille arrive tout en haut, elle saute immédiatement en bas de l'échelle et recommence.

On appelle X_n la position de la grenouille sur l'échelle. L'espace d'états est donc $E = \{0, 1, 2, \dots, 5\}$. Si a un instant n la grenouille est au niveau $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ de l'échelle, alors à l'instant $n+1$ elle sera

$$\begin{cases} \text{au barreau } x+1 \text{ avec probabilité } 1/2, \\ \text{au barreau } x-1 \text{ avec probabilité } 1/2, \end{cases}$$

ce qui se traduit par

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x+1 \,|\, X_n = x) = 1/2 \quad (= \mathbb{P}(X_1 = x+1 \,|\, X_0 = x)),$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = x-1 \,|\, X_n = x) = 1/2 \quad (= \mathbb{P}(X_1 = x-1 \,|\, X_0 = x)$$

Comme les probabilités ne dépendent pas de n, il semble que l'on tienne le bon bout pour avoir une chaîne de Markov homogène. Si c'est le cas, on peut écrire une partie de la matrice de transition :

$$Q = \begin{pmatrix} ? & ? & ? & ? & ? & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ ? & ? & ? & ? & ? & ? \end{pmatrix}$$

Si la grenouille se retrouve à l'état 5, alors elle peut soit passer à l'état 4, soit passer à l'état 0. Il faut donc remplacer la dernière ligne de la matrice par

$$(1/2, 0, 0, 1/2, 0),$$

(encore une fois cela ne dépend pas de l'instant n). Si la grenouille est à l'état 0, elle ne peut que passer à l'état 1. La première ligne de la matrice est donc

$$(0, 1, 0, 0, 0).$$

X_n est donc bien une chaîne de Markov homogène, avec matrice de transition Q.

Exercice 3. Introduisons un facteur de fatigue $f \in (0,1)$, et imaginons qu'à chaque instant la grenouille reste à son état actuel avec probabilité f. X_n est toujours une chaîne de Markov ? Si oui, quelle est sa matrice de transition ?

Imaginons désormais que le facteur de fatigue $f = f_n$ dépend du temps. Que cela change-t-il ?

Si désormais le facteur de fatigue dépend de tout le chemin parcouru par la grenouille (nombre de barreaux montés et descendus), a-t-on toujours une chaîne de Markov ?

Exercice 4. Le nombre d'individus d'une population évolue de la manière suivante : A chaque instant, un individu nait avec la probabilité $p \in (0,1)$, ou meurt avec la probabilité $q = 1 - p$.

Ecrire la matrice de transition.

Ecrire la chaîne de Markov en termes des variables introduites à l'exemple 2.

Comment corriger la matrice de transition pour qu'il n'y ait pas un nombre négatif d'individus ?

Définition 3. *On dit qu'une matrice Q (éventuellement infinie) est* **stochastique** *ssi tous ses coefficients sont ≥ 0 et si la somme de chaque ligne fait 1 : $\forall x \in E$,*

$$\sum_{y \in E} Q(x,y) = 1.$$

On dit aussi **matrice markovienne**.

Remarque 2. *Les coefficients d'une matrice stochastique sont dans* $[0,1]$*, ils peuvent donc représenter une probabilité...*

Proposition 1. *Si* Q *est la matrice de transition d'une chaîne de Markov, alors elle est stochastique.*

Démonstration. Soit $x \in E$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{y\in E} Q(x,y) &= \sum_{y} \mathbb{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x)\\ &= \mathbb{P}(\text{``}X_n \textbf{ aille quelque part après être allé en } x...'')\\ &= 1.\end{aligned}$$

Plus formellement,

$$\begin{aligned}\sum_{y} \mathbb{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x) &= \sum_{y} \mathbb{E}(1_{X_1=y}|X_0 = x)\\ &= \mathbb{E}(\sum_{y\in E} 1_{X_1=y}|X_0 = x)\end{aligned}$$

Or

$$\sum_{y\in E} 1_{X_1=y} = 1$$

tout le temps car X_1 est égal à un et un seul des y. Donc

$$\sum_{y} \mathbb{P}(X_1 = y \,|\, X_0 = x) = \mathbb{E}(1|X_0 = x) = 1.$$

□

On va voir que réciproquement, pour toute matrice stochastique Q sur un produit $E\times E$, il existe une chaîne de Markov sur E qui admet Q comme matrice de transition . Mais elle n'est pas unique, car il faut encore préciser la loi du premier état X_0.

1.2 Loi des X_n

Le comportement d'une chaîne de Markov X dépend entièrement de sa matrice de transition Q, et de la position initiale X_0. On appelle μ_0 la **loi initiale** de X, c'est une mesure définie par

$$\mu_0(\{x\}) = \mathbb{P}(X_0 = x).$$

Mesure et notations Toutes les mesures que l'on va voir dans ce cours sont sur un espace fini ou dénombrable E. Cela veut dire qu'elles sont uniquement déterminées par leurs valeurs sur les singletons : Pour $A \subset E$,

$$\mu(A) = \sum_{x \in A} \mu(\{x\}).$$

On note en général abusivement $\mu(x) = \mu(\{x\})$ pour $x \in E$, et ces valeurs déterminent entièrement la mesure. On peut aussi noter la mesure comme le vecteur (ou la suite si E est infini) de ses valeurs :

$$\mu = (\mu(x))_{x \in E}.$$

Par exemple si E a 2 états et que la loi μ_0 de X_0 peut prendre indifféremment les deux valeurs avec probabilité 1/2,

$$\mu_0 = (1/2, 1/2).$$

Connaissant μ_0 et Q, on peut calculer directement la loi de X_n.

Proposition 2. *Pour toute suite* $\{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ *dans* E, *on a*

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, &X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) \\ &= \mu_0(x_0) Q(x_0, x_1) Q(x_1, x_2) \ldots Q(x_{n-1}, x_n).\end{aligned}$$

Démonstration. On a (en utilisant la propriété de Markov)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n)& \\ &= \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1 \,|\, X_0 = 0) \mathbb{P}(X_0 = x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_1 = x_1 \,|\, X_0 = 0) \mu_0(x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_2 = x_2 \,|\, X_1 = x_1, X_0 = 0) \mathbb{P}(X_1 = x_1 | X_0 = x_0) \mu_0(x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_2 = x_2 \,|\, X_1 = x_1, X_0 = 0) Q(x_0, x_1) \mu_0(x_0) \\ &= \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_2 = x_2 \,|\, X_1 = x_1) Q(x_0, x_1) \mu_0(x_0)\end{aligned}$$

en utilisant la **propriété de Markov**. En utilisant le même raisonnement, on montre que

$$\mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_2 = x_2 \,|\, X_1 = x_1) = \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_3 = x_3 \,|\, X_2 = x_2) Q(x_1, x_2).$$

$$\mathbb{P}(X_0 = x_0, X_1 = x_1, X_2 = x_2, \ldots, X_n = x_n) = \mathbb{P}(X_n = x_n, \ldots, X_3 = x_3 \,|\, X_2 = x_2) Q(x_1, x_2) Q(x_0, x_1) \mu_0(x_0).$$

Par récurrence, on montre la formule proposée.

□

Pour une même chaîne X, on considère souvent plusieurs lois initiales différentes. Dans ce cas on précise la loi utilisée en notant

$$\mathbb{P} = \mathbb{P}_\mu$$

dans chaque calcul de probabilité, et l'espérance est alors notée $\mathbb{E}_x$. Si la loi est un “Dirac” $\mu = \delta_x$ pour un certain $x \in E$ (ce qui veut dire $X_0 = x$ p.s.), alors on note plus simplement $\mathbb{P}_{\delta_x} = \mathbb{P}_x, \mathbb{E}_{\delta_x} = \mathbb{E}_x$.

Exemple 3. Pour reprendre l'exemple de la grenouille,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}_0(X_1 = 1) = 1,\\
&\mathbb{P}_0(X_1 = 3) = 0,\\
&\mathbb{P}_2(X_1 = 3) = 1/2,\\
&\mathbb{P}_0(X_3 = 3) = (1/2)^3 = 1/8,\\
&\mathbb{P}_0(X_3 = 4) = 0,\\
&\qquad\qquad ...
\end{aligned}$$

On peut calculer directement la loi de X_n en utilisant le produit matriciel.

Exercice 5. Soit $a \in (0,1)$. On considère une chaîne de Markov dont la matrice de transition est la suivante :

$$\begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

Calculer la probabilité de l'événement A_3 de passer pour $n \leq 5$ trois fois par l'état 2

1. Avec $\mu_0 = (1, 0)$,
2. Avec $\mu_0 = (1/2, 1/2)$.

Correction :

Il faut dénombrer tous les chemins possibles qui contiennent trois fois l'état 2. En partant de 1 :

— $x^1 = (1, 1, 2, 2, 2)$
— $x^2 = (1, 2, 1, 2, 2)$
— $x^3 = (1, 2, 2, 1, 2)$
— $x^4 = (1, 2, 2, 2, 1)$

Pour le premier chemin, sa probabilité est, d'après la formule précédente,

$$\mathbb{P}_1(X = x^1) = Q(1,1)Q(1,2)Q(2,2)Q(2,2) = a(1-a)a^2 = a^3(1-a).$$

Avec d'autres calculs, on montre

$$\mathbb{P}_1(A_3) = a^3(1-a) + 2a(1-a)^3 + a^2(1-a)^2.$$

Pour la seconde question, il faut calculer $\mathbb{P}_2(A_3)$ de manière similaire, et on a

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(A_3) = \mu_0(\{1\})\mathbb{P}_1(A_3) + \mu_0(\{2\})\mathbb{P}_2(A_3) = 1/2(...)$$

Notation 1. Pour une mesure μ_0 et une matrice Q, on note la mesure

$$(\mu_0 Q)(y) = \sum_{x\in E} \mu_0(x)Q(x,y).$$

Cela revient à multiplier (matriciellement) la mesure μ_0 vue comme un vecteur $\mu_0 = (\mu_0(x_1), \mu_0(x_2), \dots)$ par la matrice Q.

Proposition 3. *Si μ est la loi de X_0, alors (μQ) est la loi de X_1.*

Démonstration. Soit $y \in E$.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X_1 = y) &= \sum_x \mathbb{P}(X_1 = y, X_0 = x)\\ &= \sum_x \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)\mathbb{P}(X_0 = x) = \sum_x \mu(x)Q(x,y) = (\mu Q)(y)\end{aligned}$$

□

Proposition 4. *Pour tout n, la loi de X_n est μQ^n.*

Démonstration. D'après la proposition 3, la loi de X_1 est $\mu_1 = \mu Q$.

On peut alors "oublier" la variable X_0, et ne considérer que la chaîne qui part de X_1 (formellement, poser $X'_0 = X_1, X'_1 = X_2, etc...$). La matrice de transition est toujours Q, par contre la loi initiale n'est plus μ, c'est μ_1.

La loi de X_2 (i.e. X'_1) est donc, en réutilisant la proposition 3,

$$\mu_2 = (\mu_1 Q) = ((\mu Q) * Q).$$

Comme le produit matriciel est associatif, $((\mu Q)*Q) = \mu*Q*Q = \mu*(Q*Q) = \mu * Q^2$.

La loi de X_2 est donc bien μQ^2, comme annoncé. En raisonnant par récurrence, on montre bien $\mu_3 = (\mu * Q^2) * Q = \mu Q^3$, $\dots$, ... et $\mu_n = \mu Q^n$. □

Exercice 6. Une chaîne de Markov avec états $E = \{1, 2\}$ a la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

pour un nombre $a \in (0,1)$.

Calculer la loi de X_n pour tout n, sachant que l'on part de l'état $X_0 = 1$. Donner par exemple $\mathbb{P}_1(X_n = 1)$ la probabilité de retour en 1 en n coups.

Correction : On a $\mu = \delta_1$. La loi de X_n est donnée par μQ^n, il faut donc calculer la puissance n-ème de Q (c'est la difficulté de ce type d'exercice).

Pour cela, le plus simple est de diagonaliser la matrice. Comme c'est une matrice stochastique,

$$Q * 1 = 1 \quad ,$$

ou $1 = (1, 1, ..., 1)$, et $*$ est le produit matriciel ($Q * 1(x) = \sum_y 1Q(x, y) = 1$). Cela veut dire que 1 est vecteur propre associé à la valeur propre 1.

Comme la matrice Q est symétrique, elle est diagonalisable. La première valeur propre est 1, et la trace est

$$Tr(Q) = 2a.$$

Il s'ensuit que la seconde valeur propre est $\lambda = 2a - 1$. Pour trouver le vecteur propre associé, résolvons le système $Q * (u, v) = \lambda(u; v)$:

$$\begin{cases} au + (1-a)v = (2a-1)u \\ (1-a)u + av = (2a-1)v, \end{cases} \quad \begin{cases} (1-a)v = (a-1)u \\ (1-a)u = (a-1)v, \end{cases}$$

i.e $u = -v$. Le vecteur propre $(1; -1)$ correspond donc à la valeur propre λ.

On décompose le vecteur $\mu_0 = (1, 0)$ suivant la base de vecteurs propres :

$$(1, 0) = \frac{1}{2}\left[(1, 1) + (1, -1)\right]$$

Donc

$$Q^n(1, 0) = \frac{1}{2}\left[Q^n(1, 1) + Q^n(1, -1)\right] = \frac{1}{2}\left[(1, 1) + \lambda^n(1, -1)\right] = \left(\frac{1}{2} + \lambda^n/2, \frac{1}{2} - \lambda^n/2\right).$$

Après n coups, X_n a un tout petit peu plus de chances d'être en 1 qu'en 2, mais ce tout petit peu est en λ^n et s'atténue rapidement avec le temps. Plus a(=probabilité de rester à sa place) est grand, plus ça décroît lentement.

Exercice 7. (exercice 1.1.4 du Norris, p. 9) Une puce saute aléatoirement sur les sommets d'un triangle, sans préférence. Quelle est la probabilité qu'après n sauts la puce soit de retour à son point de départ ?

Remarque : De manière similaire à l'exercice précédent, on devrait trouver 1/3 plus un terme correctif qui décroît (vite) avec le temps.

Recommencer si cette fois la puce saute dans le sens des aiguilles d'une montre avec probabilité 2/3 et dans l'autre sens avec probabilité 1/3.

Remarque 3. *TRES IMPORTANT !!*

$$Q^k(x, y) \neq Q(x, y)^k.$$

membre de gauche : multiplication matricielle.

membre de droite : multiplication de réels (beaucoup plus facile).

Proposition 5. *On a pour $n \geq 0, k \geq 0$*

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_n = x) = Q^k(x, y)$$

Démonstration. Par la propriété de Markov,

$$\mathbb{P}(X_{n+k} = y | X_n = x) = \mathbb{P}(X_k = y | X_0 = x).$$

Supposons que $\mu_0 = \delta_x$, c'est-à-dire que la chaine démarre toujours en x. On a

$$\mathbb{P}_x(X_k = y | X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_k = y) = (\mu_0 Q^k)(y) = (\delta_x Q^k)(y) = Q^k(x, y).$$

Dans le cas général (μ_0 quelconque), on a également $\mathbb{P}(X_k = y | X_0 = x) = \mathbb{P}_x(X_k = y) = Q^k(x, y)$. □

2 Temps d'absorption

Dans ce chapitre on se pose la question suivante : Etant donné une chaîne X et x dans l'espace d'états E, quel est le temps moyen (éventuellement infini) que met X à arriver au temps x.

Ce temps dépend évidemment de la loi initiale μ_0 : Si $\mu_0 = \delta_x$, le temps d'attente est en moyenne 0. Si la chaîne n'est pas trop compliquée, il est possible de mener des calculs explicites pour trouver ce temps moyen.

2.1 Temps d'arrêt

Avant d'expliquer comment faire, il faut comprendre un fait fondamental sur les chaînes de Markov. Pour $x \in E$ on définit le temps aléatoire

$$T_x = \min\{n \geq 0 \, : \, X_n = x\},$$

premier moment où la chaîne atteint x.

Définition 4. *Soit T une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. T est un* **temps d'arrêt** *si pour tout n, l'évènement $(T = n)$ dépend uniquement du passé, c'est-a-dire si l'évènement $(T = n)$ est entièrement déterminé par les variables $X_1, \dots, X_n$ (c'est-à-dire mesurable par rapport à $\sigma(X_1, \dots, X_n)$).*

Exemple 4. Pour $x \in E$, le temps T_x est un temps d'arrêt : Pour $n \in \mathbb{N}$,

$$(T_x = n) = (X_1 \neq x, X_2 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = x).$$

C'est bien un évènement qui est entièrement déterminé si on connait les valeurs de $X_1, \dots, X_n$.

Exercice 8. 1. $(T = n)$ peut être remplacé par $(T \leq n)$, ou $(T > n)$ dans la définition précédente.

2. Par contre on ne peut pas le remplacer par $(T < n)$. Montrez que $S_x = T_x - 1$ est un contre-exemple.

On peut donc donner une autre preuve que T_x est un temps d'arrêt :

$$(T_x > n) = \cap_{k=1}^{n}(X_k \neq x) \in \sigma(X_1, \dots, X_n)$$

On peut alors élargir la **propriété de Markov** aux temps aléatoires, à condition que ceux-ci soient des temps d'arrêt .

Exercice 9. Soit $R_k, k \geq 1$, des variables iid de Rademacher, c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathbb{P}(R_k = 1) = 1/2, \\ \mathbb{P}(R_k = -1) = 1/2, \end{cases}$$

et X_n leur somme. Soit T le premier temps ou la chaîne est passé deux fois par l'état 10 :

$$T = \min\{n : X_n = 10 \text{ et il existe un seul } k < n \text{ tel que } X_k = 10\}.$$

Montrer formellement que T est un temps d'arrêt.

Proposition 6 (**propriété de Markov forte**)**.** *Soit $k \geq 1$, et T un temps d'arrêt . Pour $x, y \in E$,*

$$\mathbb{P}(X_{T+k} = y | X_T = x) = \mathbb{P}(X_k = y | X_0 = x) = Q^k(x, y).$$

Démonstration. Prouvons-le pour $T = T_x$, pour un x quelconque de E, et $k \geq 1$.

$$\mathbb{P}(X_{T_x+1} = y | X_{T_x} = x) = \sum_n \mathbb{P}(X_{T_x+1} = y | X_{T_x} = x, T_x = n)\mathbb{P}(T_x = n). \quad (1)$$

Or $T_x = n$ est équivalent à "$X_0 \neq x, X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x, X_n = x$". On a donc

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(X_{T_x+1} = y | X_{T_x} = x, T_x = n) \\ &\qquad = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x; X_0 \neq x, X_1 \neq x, \dots, X_{n-1} \neq x) \\ &\qquad = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x) = Q(x, y) \end{aligned}$$

car "le futur ne dépend que du présent" (**propriété de Markov**). En reportant dans (1),

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{T_x+1} = y | X_{T_x} = x) &= \sum_n \mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)\mathbb{P}(T_x = n) \\ &= Q(x, y) \sum_n \mathbb{P}(T_x = n) = Q(x, y). \end{aligned}$$

En appliquant ce raisonnement itérativement k fois, on obtient le résultat.

Exercice 10. Traiter le cas où T est un temps d'arrêt quelconque.

Si T est un temps d'arrêt quelconque, il faut juste remarquer que l'on peut toujours écrire

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x, T = n) = \mathbb{P}(X_{n+1} = y | X_n = x),$$

car $T = n$ ne dépend que du passé (incarné par les variable $X_1, \ldots, X_n$), et la propriété de Markov nous dit que connaître le passé est équivalent à connaître la valeur de X_n : $X_n = x$. □

Exercice 11. Soit X_n des variables aléatoires iid positives de même loi qu'une variable X telle que

$$\mathbb{E}(|X|) < +\infty.$$

On sait que

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k$$

est une chaîne de Markov. Soit T un temps d'arrêt. Montrer que

$$\mathbb{E}(\sum_{k=1}^{T} X_k) = \mathbb{E}(T)\mathbb{E}(X).$$

(Indice : le terme de gauche est égal à $\mathbb{E} \sum_{k=1}^{\infty} X_k 1_{\{T > k-1\}}$)

On pourra utiliser la formulation suivante de la **propriété de Markov**.

Proposition 7. *Une autre manière de formuler la propriété de Markov est la suivante : Pour tout temps d'arrêt T, la chaîne*

$$X' = (X'_0 = X_T, X'_1 = X_{T+1}, \ldots)$$

est une chaîne de Markov dont la matrice de transition est Q et la loi initiale est X_T. De plus, la loi de X' est indépendante de $(X_0, \ldots, X_{T-1})$ conditionnellement à X_T.

Démonstration. Soit $x_0, \ldots, x_{n+1} \in E$.

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X'_{n+1} = x_{n+1} | X'_n = x_n, X'_{n-1} = x_{n-1}, \ldots, X'_0 = x_0) \\
&\quad = \mathbb{P}(X_{T+n+1} = x_{n+1} | X_{T+n}, \ldots, X_T = x_0) \\
&\quad = \sum_{q \geq 0} \mathbb{P}(T = q | X_{q+n} = x_n, \ldots, X_q = x_0) \mathbb{P}(X_{q+n+1} = x_{n+1} | T = q, X_{q+n} = x_n, \ldots, X_q = x_0) \\
&\quad = \sum_{q \geq 0} \mathbb{P}(T = q | X_{q+n} = x_n, \ldots, X_q = x_0) \mathbb{P}(X_{q+n+1} = x_{n+1} | X_{n+q} = x_n) \\
&\quad = \sum_{q \geq 0} \mathbb{P}(T = q | X_{q+n} = x_n, \ldots, X_q = x_0) Q(x_n, x_{n+1}) \\
&\quad = Q(x_n, x_{n+1}) \sum_{q \geq 0} \mathbb{P}(T = q | X_{q+n} = x_n, \ldots, X_q = x_0) \\
&\quad = Q(x_n, x_{n+1})
\end{aligned}$$

$\square$

2.2 Probabilités et temps d'absorptions

Avec le langage introduit dans la section précédente, on s'intéresse pour $A \subset E$ aux quantités

$$\begin{aligned} h^A &= \mathbb{P}(T_A < \infty), \\ k^A &= \mathbb{E}(T_A). \end{aligned}$$

Remarquons que si $h_A \neq 1, k^A = \infty$, donc il faut calculer h^A en premier, et ensuite k^A si ça a du sens.

Si l'on conditionne par l'état de départ $x \in E$, on a

$$\begin{aligned} h_x^A &= \mathbb{P}_x(T_A < \infty) \quad \text{Probabilité d'arriver un jour en } A \text{ en partant de } x \text{ ,} \\ k_x^A &= \mathbb{E}_x(T_A) \qquad \text{Temps moyen pour y arriver.} \end{aligned}$$

Si $x \in A$, h_x^A est trivialement 1, et T_x^A est trivialement 0. Si $A = \{y\}$ est constitué d'un unique point, on note $h_x^{\{y\}} = h_x^y, k_x^{\{y\}} = k_x^y$.

Théorème 1. *Si $x \notin A$, pour les calculer efficacement il faut se persuader des deux faits suivants :*

$$\begin{aligned} h_x^A &= \sum_{y \in E} Q(x,y) h_y^A, \ \textit{pour tout } x \in E \\ k_x^A &= 1 + \sum_{y \in E} Q(x,y) k_y^A, \ \textit{pour tout } x \in E. \end{aligned}$$

De plus, si ce système linéaire a plusieurs solutions, $(h_x^A)_x$ (resp.$(k_x^A)_x$) est la plus petite solution positive du système vérifiant $h_x^A = 1$ (reps. $k_x^A = 0$) pour $x \in A$.

Traitons un exemple d'utilisation avant d'étudier la preuve :

Exemple 5. Une puce saute sur un triangle, avec une probabilité $2/3$ dans le sens horaire, et $1/3$ dans le sens anti-horaire.

— On numérote les sommets : 1,2,3. Matrice de transition :

— Intéressons-nous aux temps d'atteinte. Soit $A = \{x_1\}$ le sommet 1. On a pour $i = 2, 3$:

$$k_i^1 = 1 + \sum_{j=1}^{3} Q(i,j) k_j^1.$$

On a donc $k_1^A = 1$ et 2 équations :

$$k_2^1 = 1 + \sum_{j=1}^{3} Q(2,j)k_j^1 = 1 + \frac{1}{3}k_1^1 + 0 + \frac{2}{3}k_3^1 = 1 + \frac{2}{3}k_3^1.$$

$$k_3^1 = 1 + \sum_{j=1}^{3} Q(3,j)k_j^1 = 1 + \frac{2}{3}k_1^1 + \frac{1}{3}k_2^1 + 0 = 1 + \frac{1}{3}k_2^1.$$

Il faut résoudre ce système à 2 équations à 2 inconnues.

Démonstration. Les deux expressions sont obtenues en conditionnant par la valeur de X_1 dans le calcul de $\mathbb{P}(X_n \in A)$:

$$h_x^A = \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n \in A | X_0 = x) = \sum_{y\in E} \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n \in A | X_1 = y, X_0 = x)\mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)$$
$$= \sum_{y\in E} \mathbb{P}(\exists n \geq 1, X_n \in A | X_1 = y)Q(x,y)$$
$$= \sum_{y\in E} Q(x,y)h_y^A.$$

De même pour k_x^A :

$$k_x^A = \sum_n n\mathbb{P}_x(T_A = n | X_0 = x) = \sum_n n \sum_{y\in E} \mathbb{P}(T_A = n | X_1 = y)\mathbb{P}(X_1 = y | X_0 = x)$$
$$= \sum_y Q(x,y)\mathbb{E}(T_A | X_1 = y)$$

T_A est le temps que met la chaîne $(X_0 = x, X_1, X_2, \dots)$ pour arriver en A. $T'_A = T_A - 1$ est donc le temps mis par la chaîne $X' = (X'_0 = X_1 = y, X'_1 = X_2, X'_2 = X_3, \dots)$ pour arriver en A (car au lieu de partir au temps 0 on part au temps 1).

On a donc

$$\mathbb{E}(T_A | X_1 = y) = \mathbb{E}(T'_A + 1 | X_1 = y) = 1 + \mathbb{E}_y(T_{A'}).$$

T'_A est le temps moyen mis par la chaîne $X' = (X'_0 = X_1, X'_1 = X_2, \dots)$ pour arriver en A. Ce temps est exactement le même qua la chaîne $(X_0, X_1, \dots)$ conditionnée par $X_0 = y$ pour arriver en y. Donc

$$\mathbb{E}_y(T'_A) = k_y^A.$$

En reportant, on a

$$k_x^A = \sum_y Q(x,y)(1 + k_y^A) = 1 + \sum_y Q(x,y)k_y^A$$

car Q est une matrice de transition .

On admet la minimalité dans ce cours.

$\square$

Exercice 12. Soit une population X_n qui s'éteint si $n=0$ et autrement croît (ou décroît) à chaque temps n par

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) = p, \\ \mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) = q = 1-p. \end{cases}$$

La matrice de transition est

$$Q(x,y) = \begin{cases} p \text{ si } x \neq 0, y = x+1 \\ q \text{ si } y = x-1, \\ 1 \text{ si } x = y = 0, \end{cases}$$

et $Q(x,y) = 0$ partout ailleurs.

Le but de l'exercice est de trouver la probabilité d'atteindre 0 en partant de $n \in \mathbb{N}$ (extinction)

1. Trouver une relation entre $h_n^0, h_{n-1}^0, h_{n+1}^0$. La probabilité d'atteindre 0 en partant d'un état initial de $X_0 = n > 0$ individus est h_n^0, et vérifie

$$h_n^0 = q h_{n-1}^0 + p h_{n+1}^0, n \geq 1.$$

   Rappel sur les suites récurrentes d'ordre 2 : Si (U_n) vérifie $aU_{n+2} + bU_{n+1} + cU_n = 0$ pour tout $n \geq 0$, il faut considérer les racines (éventuellement complexes) x_1 et x_2 du polynôme $aX^2 + bX + c$. Si $x_1 \neq x_2$, U_n est de la forme

$$U_n = \alpha x_1^n + \beta x_2^n,\ n \geq 0.$$

   avec α et β a déterminer en calculant des valeurs particulières de la suite. Si $x_1 = x_2$ est une racine double,

$$U_n = (\alpha + \beta n) x_1^n.$$

2. En déduire la forme générale de la suite $(h_n^0)_n$. La suite $(U_n = h_n^0)$ est donc une suite récurrente d'ordre 2 définie par

$$\begin{aligned} U_0 &= 1, \\ U_n &= qU_{n-1} + pU_{n+1}. \end{aligned}$$

   Revenons au problème de la population :il faut poser le polynôme caractéristique $X = q + pX^2$ dont les racines sont

$$\begin{aligned} x_1 &= 1, \\ x_2 &= q/p. \end{aligned}$$

La solution est donc de la forme

$$\begin{cases} U_n = \alpha 1^n + \beta (q/p)^n & \text{si } p \neq 1/2, \\ U_n = (\alpha + \beta n)1^n \text{ si } p = 1/2. \end{cases}$$

pour α, β à déterminer.

3. En utilisant le fait que $h_n^0 \in [0,1]$, montrer que si $p \leq 1/2$, $\beta = 0$. Qu'en déduisez-vous pour la population ? Si $p \leq 1/2$, comme $x_2 > 1$, le terme x_2^n explose, ce qui contredit $U_n \in (0,1)$, donc $\beta = 0$ et $U_n = U_0 = 1$ et la population est sure de s'éteindre.
4. Donner la probabilité d'extinction en partant de n si $p > 1/2$. **si** $p > 1/2$, la probabilité de s'éteindre est de

$$U_n = \alpha + \beta (q/p)^n.$$

La contrainte $U_0 = 1$ impose $\alpha + \beta = 1$. Chaque $\alpha, \beta \geq 0$ tels que $\alpha + \beta = 1$ donne une solution, mais (h_x^A) est la plus petite solution ! Comme $(q/p)^n < 1$, elle est obtenue pour $\alpha = 0$, donc $\beta = 1$ et

$$h_n^{\text{extinction}} = (q/p)^n.$$

C'est le seul cas ou la population a une chance de ne pas s'éteindre. Remarquons que, logiquement, plus le nombre initial d'individus est grand, moins il y a de chances de s'éteindre.

Exercice 13. Un joueur joue à pile-ou face. La pièce a une probabilité p de tomber sur pile, et $q = 1 - p$ de tomber sur face. Le joueur mise 1$ a chaque fois et parie toujours sur pile.

1. Quel est la probabilité de perdre tout son capital de départ ? (Faire le lien avec l'exo précédent).

2. Le joueur décide que si jamais il atteint 10$, il repart avec son pactole. Quelle est la probabilité qu'il y parvienne ?

Exercice 14. Un joueur a 2$ et a besoin rapidement d'avoir 10$. Il peut jouer son argent à pile ou face selon les règles suivantes : Si il gagne, il double sa mise, et si il perd, il perd sa mise. Il décide d'adopter une stratégie où il joue tout son argent à chaque fois si il a moins de 5$, et sinon il ne joue que la quantité nécessaire pour arriver à 10$.

1. Identifier la chaine de Markov.
2. Donner le graphe de la chaine de Markov.
3. Quelle est la probabilité pour le joueur d'atteindre son objectif ?
4. Quel temps mettra-t-il en moyenne pour que le jeu s'arrête (soit parce qu'il perd tout soit parce qu'il atteint 10$) ?

Exercice 15. Pour la population de l'exercice 12, on souhaite calculer la distribution du temps d'extinction T_0 en partant de 1 individu. On note plus généralement T_j le premier temps de passage à j.

La méthode la plus efficace consiste à considérer la fonction caractéristique

$$\varphi(s) = \mathbb{E}_1(s^{T_0}) = \sum_{n\geq 0} s^n \mathbb{P}_1(T_0 = n),\ 0 \leq s < 1.$$

1. Montrer que
$$\mathbb{E}_2(s^{T_0}) = \mathbb{E}_2(s^{T_1})^2 = \varphi(s)^2.$$
2. Montrer que
$$\mathbb{E}_1(s^{T_0}|X_1 = 2) = \mathbb{E}_2(s^{1+T_0}).$$
3. En déduire que pour tout s $\varphi(s)$ vérifie la relation
$$ps\varphi(s)^2 - \varphi(s) + qs = 0.$$
4. Montrer que
$$\mathbb{E}_1(T_0) = \lim_{s\uparrow 1} \varphi'(s).$$

En déduire la valeur du temps moyen d'extinction (on peut utiliser les résultats de l'exercice 12).

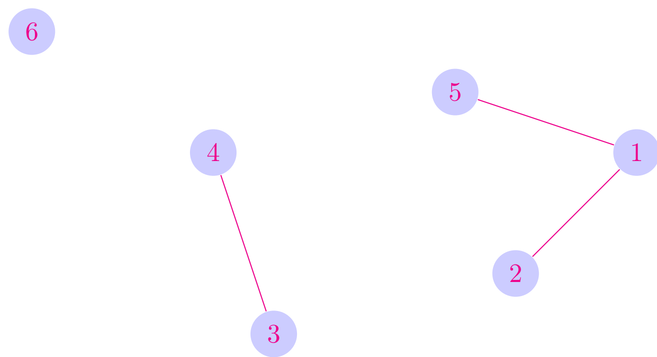
5*. Indiquer comment calculer $\mathbb{P}_1(T_0 = k), k \geq 1$. En déduire $\mathbb{P}_1(T_0 < \infty)$. Que remarquez-vous ?

On pourra utiliser la Proposition 7.

Exercice 16. Similaire au précédent : ex. 1.4.1 du Norris, p. 23.

3 Classification des états

Exemple 6. Considérons la chaine du graphe suivant : (chaque trait représente une probabilité 1/3 dans les deux sens), et en chaque point x il y a une probabilité 1/3 de rester sur place. On observe que si la chaine part de 4, elle ne pourra jamais arriver en $6, 1, 2, 5$. On regroupe les points en catégories sur le principe qu'une chaine de Markov ne pourra jamais sauter d'une catégorie à l'autre. Ici on se retrouve avec trois classes : $\{1, 2, 5\}, \{3, 4\}, \{6\}$.



On s'intéresse à la "dynamique" des chaînes de Markov dans ce chapitre. On dit qu'un état $x \in E$ mène à un état $y \in E$ si

$$\mathbb{P}_x(\exists n \geq 0, X_n = y) > 0.$$

La probabilité de passer par y après être passée par x est non-nulle. On note dans ce cas

$$x \rightsquigarrow y.$$

Si $x \rightsquigarrow y$ et $y \rightsquigarrow x$, on note

$$x \leftrightsquigarrow y$$

et on dit que x et y communiquent.

Exemple 7. Dans l'exemple d'une population, en général, pour tout $n \geq 1$, $n \rightsquigarrow 0$, mais $0 \rightsquigarrow n$ pour aucun n excepté 0. On a aussi $n \leftrightsquigarrow m$ pour tous $n, m > 0$.

On dit que $\{0\}$ est un état absorbant.

il est facile de voir que $x \rightsquigarrow y$ ssi il existe une suite d'états $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ qui "mène" de x à y et telle que $Q(x_m, x_{m+1}) > 0$. On appelle un tel chemin un chemin probable. La probabilité

$$\mathbb{P}(x \to ... \to y) \geq \mathbb{P}(x \to x_1 \to x_2 \to \cdots \to x_k = y) = \prod_m Q(x_m, x_{m++1}) > 0.$$

Cette propriété d'existence d'un chemin est en fait nécessaire : Si aucun chemin possible ne mène de x à y, alors on n'a aucune chance d'atteindre y.

D'une manière différente, on sait que la loi de X_n en partant de x est $Q^n(x, y)$ (proposition 4). Donc en notant $Q^n(x, y)$ les coefficients de la matrice de transition Q^n, $\boxed{x \rightsquigarrow y \text{ ssi } \exists n \geq 0 \text{ tel que } Q^n(x, y) > 0}$.

Théorème 2. *La relation $\leftrightsquigarrow$ est une relation d'équivalence et on peut partitionner E par l'ensemble des classes d'équivalences*

$$E = \cup_{x \in E} C_x$$

avec $C_x = C_y$ si $x \leftrightsquigarrow y$, et $C_x \cap C_y = \emptyset$ sinon.

Démonstration. Prouvons que si deux états x et y ne communiquent pas, alors $C_x \cap C_y = \emptyset$. En effet, s'il existe $z \in C_x \cap C_y$, alors il existe un chemin de x à z car $x \rightsquigarrow z$ et il existe un chemin de z à y. En mettant ces chemins bout a bout, on obtient un chemin $x \rightsquigarrow z$. En raisonnant en partant de y, on trouve aussi un chemin $y \rightsquigarrow x$; on a donc $x \leftrightsquigarrow y$, contradiction.

Cela revient en fait à montrer la transitivité et la réflexivité de $\leftrightsquigarrow$ (nécessaires d'après la définition) pour montrer que c'est une relation d'équivalence. □

Exercice 17. Un sondeur se déplace au hasard dans un immeuble, sonnant parfois plusieurs fois chez la même personne. Cet immeuble comporte trois étages, et il n'y a qu'un ascenseur, qui de surcroît ne peut que monter. Trouvez la chaîne de Markov, et déterminer ses classes d'équivalences.

Exercice 18. Une chaîne de Markov a la matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Quelles sont ses classes d'équivalence ?

On pourra dessiner un diagramme expliquant comment passer d'un état à l'autre.

3.1 Récurrence et transience

Définition 5. *On rappelle que T_x est le temps de 1er passage en x. Pour $r \geq 0$, on note*

$$T_x^{(r)} \text{ le temps de } r\text{-ème retour en } x,$$

défini par récurrence par

$$T_x^{(0)} = T_x; \quad T_x^{(r+1)} = \inf\{n > T_x^{(r)} : X_n = x\}.$$

Définition 6. *Un état x est dit récurrent si la probabilité de retour est 1, c'est-à-dire si*

$$\mathbb{P}_x(T_x^{(1)} < \infty) = 1.$$

Si cette propriété n'est pas vérifiée, on dit que l'état est transient.

Exemple 8. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$.

Exercice 19. Dans l'exercice 17, quelles sont les classes récurrentes ? Transientes ?

Remarque : $T_x^{(1)} \neq T_x = 0$ si $X_0 = x$.

Montrons que $T_x^{(r)}, r \geq 0$, est un temps d'arrêt :

Proposition 8. *Pour tous $x \in E, r \geq 0$, $T_x^{(r)}$ est un temps d'arrêt.*

Démonstration. On peut commencer par réfléchir à ce que ça veut dire et voir que c'est assez évident : "au temps n, je peux dire si oui ou non je suis passé r fois par x"...Plus formellement :

Il suffit de montrer que pour $n \geq 0$ l'événement $(T_x^{(r)} = n)$ est déterminé par ce qui se passe avant n :

$$T_x^{(r)} = n \Leftrightarrow \exists \text{ une sous-partie } P \subseteq \{1, \ldots, n-1\} \text{ de cardinal } |P| = r$$
$$\text{telle que } (X_i = x) \text{ pour } i \in P \text{ et } X_i \neq x \text{ pour } i \notin P \text{ et } X_n = x.$$

Donc

$$(T_x^{(r)} = n) = \bigcup_{P \subseteq \{1,\ldots,n-1\}, |P| = r} (X_n = x;\ X_i = x, i \in P; X_i \neq x, i \notin P),$$

et voilà !

On pouvait le montrer par récurrence en remarquant

$$(T_x^{(r)} = n) = \cup_{0 \leq k < n} (T_x^{(r-1)} = k; X_m \neq x, k < m < n; X_n = x).$$

$\square$

On appelle r-ème excursion

$$S_x^{(r)} = T_x^{(r+1)} - T_x^{(r)}$$

le temps passé loin de x entre le r-ème et le $r+1$-ème passage.

Proposition 9. *La loi de $S_x^{(r)}$ ne dépend pas de r : Pour tout $k \geq 1$*

$$\mathbb{P}(S_x^{(r)} = k) = \mathbb{P}(S_x^{(1)} = k) = \mathbb{P}_x(T_x = k).$$

De plus, $S_x^{(r)}$ est indépendante de $(X_k; k \leq T_x^{(r)})$. Les $S_x^{(r)}, r \geqslant 0$, forment donc une suite de variables IID (indépendantes et identiquement distribuées).

Démonstration. En appliquant la **propriété de Markov forte** , la chaîne

$$X^{(r)} = (X_0^{(r)} = X_{T_x^{(r)}} = x, X_1^{(r)} = X_{T_x^{(r)}+1}, X_2^{(r)} = X_{T_x^{(r)}+2}, \ldots)$$

est est une chaîne de Markov de matrice de transition Q qui démarre de $X_0^{(r)} = x$ (donc de loi initial $\mu_0 = \delta_x$).

On peut considérer simultanément plusieurs évènements du futur :

$$\mathbb{P}(X_{T_x^{(r)}+1} = y_1, X_{T_x^{(r)}+2} = y_2, \ldots, X_{T_x^{(r)}+k} = y_k | X_{T_x^{(r)}} = x) = \mathbb{P}_x(X_1 = y_1, \ldots, X_k = y_k).$$

En choisissant $y_k = x, y_i \neq x$ pour $i < k$, on a

$$\mathbb{P}(S_x^{(r)} = k) = \mathbb{P}(T_x = k),\ k \geq 0.$$

$\square$

Une autre manière de voir les choses est de considérer le nombre de visites en un point x après 0 sachant $X_0 = x$:

$$V_x = \#\{n \geq 1 :\ X_n = x\} = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{1}_{X_n = x}.$$

Remarquons que par le théorème de Fubini/Beppo-Levi

$$\mathbb{E}_x V_x = \mathbb{E}_x(\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{X_n=x}) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}_x(\mathbf{1}_{X_n=x}) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(X_n = x) = \sum_{n\geq 1} Q^n(x,x).$$

En particulier, cela implique que $V_x < \infty$ p.s. si $\sum_n Q^n(x,x) < \infty$.

Proposition 10. *$x \in E$ est récurrent ssi pour toute loi initiale*

$$V_x = \infty \quad p.s.$$

ssi

$$\sum_{n\geq 0} Q^n(x,x) = \infty.$$

Démonstration. On a p.s. $1_{V_x > r} \to 1_{V_x = \infty}$ quand $r \to \infty$ et (TCD avec la domination $1_{V_x < r} \leq 1$ sur l'espace $(\Omega, \mathbb{P}_x)$)

$$\mathbb{P}(V_x = \infty) = \lim_{r\to\infty} \mathbb{P}(V_x > r) = \lim_r p_r,$$

ou $p_r = \mathbb{P}_x(V_x > r)$ est la probabilité qu'il y ait plus de r visites, c'est-a-dire au moins r retours.

Remarquons que $(V_x > r)$ équivaut à $(T_x^{(r)} < \infty)$ (le r-ème passage survient en un temps fini). Calculons p_r par récurrence :

$$\begin{aligned}
p_{r+1} = \mathbb{P}(T_x^{(r+1)} < \infty) &= \mathbb{P}(T_x^{(r)} < \infty \text{ et } T_x^{(r+1)} - T_x^{(r)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}(T_x^{(r)} < \infty \text{ et } S_x^{(r)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}(S_x^{(r)} < \infty | T_x^{(r)} < \infty) \mathbb{P}_x(T_x^{(r)} < \infty) \\
&= \mathbb{P}(T_x^{(1)} < \infty) \mathbb{P}(T_x^{(r)} < \infty) \\
&= p_1 p_r.
\end{aligned}$$

On en déduit par récurrence cette **formule importante** :

$$\mathbb{P}(T_x^{(r)} < \infty) = \mathbb{P}(V_x > r) = p_1^r$$

ou $p_1 = \mathbb{P}_x(T_x < \infty)$.

On a donc

$$\mathbb{P}(V_x > r) = p_1^r \to \begin{cases} 1 \text{ si } p_1 = 1, \\ 0 \text{ si } p_1 < 1. \end{cases}$$

Comme p_1 est la probabilité de retour en x, on voit que V_x est p.s. infini ssi $p_1 = 1$, c'est-à-dire ssi x est récurrent.

On a déjà montré que si $\sum_n Q^n(x,x) < \infty$, alors $V_x < \infty$ p.s. et donc x est transient.

Pour la réciproque, supposons x transient : alors $p_1 < 1$. On utilise un lemme :

Lemme 1. *Soit V une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. Alors*

$$\mathbb{E}(V) = \sum_{r\in\mathbb{N}} \mathbb{P}(V \geq r).$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(V) &= \sum_{r\geq 1} r\mathbb{P}(V = r) = \sum_{r\geq 1} r(\mathbb{P}(V \geq r) - \mathbb{P}(V \geq r+1)) \\
&= \sum_{r\geq 1} r\mathbb{P}(V \geq r) - \sum_{r\geq 1} r\mathbb{P}(V \geq r+1) \\
&= \sum_{r\geq 1} r\mathbb{P}(V \geq r) - \sum_{r\geq 2(\text{ ou } 1)} (r-1)\mathbb{P}(V \geq r) \\
&= \sum_{r\geq 1} (r-(r-1))\mathbb{P}(V \geq r) = \sum_{r\geq 1} \mathbb{P}(V \geq r).
\end{aligned}$$

□

Donc

$$\mathbb{E}(V_x) = \sum_r \mathbb{P}(V_x \geq r) - 1 = \sum_r p_1^r < \infty \text{ car } p_1 < 1.$$

Donc $V_x < \infty$ p.s.. □

Exercice 20. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

Soit $X_n; n \geq 1$ des variables aléatoires iid de Rademacher (de loi

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X_1 = 1) = 1/2, \\ \mathbb{P}(X_1 = -1) = 1/2.) \end{cases}$$

On définit la Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$

$$\begin{cases} S_0 = 0; \\ S_n = S_{n-1} + X_n,\ n \geq 1. \end{cases}$$

Le but de l'exercice est de montrer que la marche aléatoire est récurrente ; i.e. tout état est récurrent. Nous utiliserons 2 méthodes.

1. a)Montrer que pour tout x, x est récurrent ssi 0 est récurrent.

b)Utiliser les résultats de l'exercice 12 pour montrer que la chaîne est récurrente. (Utiliser $\mathbb{P}_0(X_n = 0) = (1/2)\mathbb{P}_1(X_n = 0) + (1/2)\mathbb{P}_{-1}(X_n = 0)$.)

2. On veut calculer explicitement la quantité $Q^n(0,0) = \mathbb{P}_0(X_n = 0)$.

a) Montrer que $Q^n(0,0) = 0$ si n est impair.

b)En utilisant le fait que tout chemin menant de x à x en n coups est constitué d'autant de "$+1$" que de "-1", montrer que le nombre de tels chemins est

$$\Gamma_{n,0\to 0} = \begin{cases} 0 \text{ si } n \text{ est impair,} \\ C^n_{n/2} = \begin{pmatrix} n \\ n/2 \end{pmatrix} \text{ si } n \text{ est pair.} \end{cases}$$

c) En montrant que chaque chemin a une probabilité 2^{-n}, donner une expression explicite de $Q^n(x,x)$.

d)En déduire le résultat. On pourra utiliser la formule de Stirling

$$n! \sim_{n\to\infty} n^n e^{-n}\sqrt{2\pi n}.$$

3) Qu'est-ce qui change si $\mathbb{P}(X_n = 1) = p \in (0,1)$ et $\mathbb{P}(X_n = -1) = q = 1-p$? La marche aléatoire est-elle toujours récurrente ?

Exercice 21. Marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$. On définit X_n des variables aléatoires iid telles que

$$\mathbb{P}(X_n = (-1,0)) = \mathbb{P}(X_n = (1,0)) = \mathbb{P}(X_n = (0,1)) = \mathbb{P}(X_n = (0,-1)) = 1/4,$$

et $S_0 = 0; S_{n+1} = S_n + X_n$ est la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$.

On va montrer que c'est une chaîne de Markov récurrente.

1. On appelle X_n^+ la projection de X_n sur la droite d'équation $y = x$, et X_n^- la projection sur la droite d'équation $y = -x$.

a)Montrer que

$$X_n^+ = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ avec probabilité } 1/2, \\ \frac{-1}{\sqrt{2}} \text{ avec probabilité } 1/2, \end{cases}$$

et qu'il en est de même de X_n^-.

b)Montrer que X_n^+ et X_n^- sont indépendantes.

2)a)On appelle $S_n^+ = \sum_{k\le n} X_n^+$ la projection de S_n sur la droite "$y = x''$ et $S_n^- = \sum_{k\le n} X_n^-$. Quelle est la probabilité $\mathbb{P}_0(S_n^- = S_n^+ = 0)$?

b)En déduire que la chaîne est récurrente.

3*. Montrer que la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est transiente pour $d \ge 3$.

Théorème 3 (Polya,1921)**.** *La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d$ est récurrente (en tous points) si $d \le 2$ et transiente (en tous points) si $d \ge 3$.*

Proposition 11. *Au sein d'une même classe d'équivalence, les états sont soit tous récurrents, soit tous transients. On parle alors de classe récurrente ou de classe transiente.*

Démonstration. Soit $x \leftrightsquigarrow y$ deux états d'une même classe, avec x transient (donc $\sum_r Q^r(x,x) < \infty$). Il existe alors n, m tels que

$$\mathbb{P}_x(X_m = y) = Q^m(x,y) > 0, \quad \mathbb{P}_y(X_n = x) = Q^n(y,x) > 0.$$

Pour $r \geq 0$, on a

$$\mathbb{P}_x(X_{n+m+r} = x) \geq \mathbb{P}_x(X_m = y; X_{m+r} = y; X_{m+r+n} = x),$$

qui correspond à la probabilité du chemin ($x \xrightarrow{m} y \xrightarrow{r} y \xrightarrow{n} x$). En décomposant la chaîne selon les temps d'arrivée en x et de r-ème passage en y, on en déduit :

$$\mathbb{P}_x(X_{n+m+r} = x) \geq Q^m(x,y)Q^r(y,y)Q^n(y,x).$$

Donc

$$\sum_r Q^r(y,y) \leq \frac{1}{Q^m(x,y)Q^n(y,x)} \sum_r Q^r(x,x) < \infty.$$

Donc y est transient.

$\square$

Remarque 4. *Si E est fini, il y a toujours au moins une classe récurrente. (Il est impossible que tous les états n'aient été visités qu'un nombre fini de fois en un temps infini).*

Il peut y avoir plusieurs classes récurrentes.

Définition 7. *On dit qu'une chaîne de Markov est irréductible si il n'y a qu'une seule classe.*

Exemple 9. La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ est irréductible. Attention : Il n'y a qu'une seule classe et pourtant cette classe peut être transiente ! (Lorsque $p \neq 1/2$).

4 Distributions invariantes

Analyse asymptotique d'une chaîne de Markov :

1. Découper les états en classes.
2. On analyse chaque classe séparément :
   — Si la classe est transiente, la chaîne s'échappe "à l'infini", donc asymptotiquement elle n'est nulle part en particulier (ex : Marche aléatoire asymétrique sur $\mathbb{Z}$)...(ou alors elle est passée dans une classe récurrente et ne reviendra plus)

— Si la chaîne est récurrente, elle visite les états les uns après les autres, en revenant sur ses pas (C'est notamment le cas lorsque la classe est finie). On se pose alors les questions suivantes :
  - Combien de temps passe-t-elle en moyenne dans chaque état ?
  - Y'a-t-il convergence (pour chaque x, y de la classe) de $\mathbb{P}_x(X_n = y)$? Si oui, la limite dépend-elle de x ?

Pour simplifier, on considère qu'il n'y a qu'une seule classe (quand il y en a plusieurs, on peut utiliser les résultats de la partie 2 pour savoir dans quelle classe on finira et avec quelle probabilité)

Que se passe-t-il quand la chaine est transiente ? Soit $x \in E$. D'après la Proposition 10, le nombre de visites en x est p.s. fini. Soit S_x le dernier temps passé en x :

$$S_x = \max\{n : X_n = x\}.$$

Alors,

$$\mathbb{P}_x(X_n = x) \leqslant \mathbb{P}(S_x \geqslant n),$$

et cette dernière probabilité est le reste de la série convergente

$$1 = \sum_{n \geqslant 1} \mathbb{P}(S_x = n),$$

donc ce reste tend vers 0. Donc

$$\mathbb{P}_x(S_n = x) \to 0.$$

C'est d'autant plus vrai en partant d'un autre état y : Pour tous états x, y

$$\mathbb{P}_y(X_n = x) \to 0.$$

cela veut dire qu'asymptotiquement, la chaine n'est nulle part en particulier, elle "s'échappe a l'infini."

Exemple 10. L'urne d'Ehrenfest N particules sont dans une boite, séparées par un petit trou. A chaque instant une particule passe de la moitié gauche à la moitié droite, ou le contraire. On note X_n le nombre de particules à gauche au temps n. ($N - X_n$ est donc le nombre de particules à droite). La probabilité qu'une particule soit éjectée dépend de la "pression" présente :

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n - 1) = X_n/N \quad \text{(pression à gauche)},$$
$$\mathbb{P}(X_{n+1} = X_n + 1) = (N - X_n)/N \quad \text{(pression à droite)}.$$

Montrer que c'est un chaîne de Markov irréductible et récurrente.

Définition 8. *Soit μ une mesure sur E. On dit que μ est invariante pour la chaîne de Markov X de matrice de transition Q si $\mu Q = \mu$.*

μ est une mesure invariante ssi pour tout $x \in E$

$$\mu(x) = \sum_{y \in E} Q(y,x)\mu(y).$$

(Il suffit de regarder la coordonnée x de l'égalité $\mu = \mu Q$.)

Rappel : Une distribution est une mesure dont la masse totale est 1 (c'est-à-dire une mesure pour laquelle la somme des masses de tous les termes vaut 1). On dit aussi une mesure de probabilité, ou juste une probabilité.

Donc une distribution invariante est une mesure invariante dont la masse vaut 1.

La mesure est dite invariante car si le premier état est tiré au hasard selon cette loi μ, alors le second point aura la même loi (mais dans ce cas il ne peut s'agir que de lois de probabilités) :

Proposition 12. *Si μ_0 la distribution initiale est invariante, alors μ_0 est également la distribution de $X_1, X_2, \dots,$ c'est-à-dire pour tout $x \in E$*

$$\mathbb{P}_{\mu_0}(X_1 = x) = \mathbb{P}_{\mu_0}(X_2 = x) = \cdots = \mu_0(x).$$

Démonstration. La preuve est évidente quand on se rappelle de la proposition 4 qui stipule que le loi de X_1 est $\mu_0 Q = \mu_0$, celle de X_2 est $\mu_0 Q^2 = (\mu_0 Q)Q = \mu_0 Q = \mu_0$, etc... $\square$

L'idée cachée derrière une distribution invariante est la suivante (nous allons la concrétiser dans cette partie) : Le temps moyen passé par la chaîne en un état x est proportionnel à $\mu_0(x)$. De plus dans certains cas, on a la convergence $\mathbb{P}_y(X_n = x) \to \mu_0(x)$ indépendamment de y (ces résultats sont faux dans un cadre général mais on précisera par la suite).

Quelle est la conséquence de l'existence d'une mesure invariante ? Intuitivement, la fréquence de retour à un état x dépend du nombre de points y qui "pointent" vers x, c'est-à-dire tels que $Q(y,x)$ est "grand", pondérés par la probabilité de passer vers ces points y. En d'autres termes, le temps moyen passé en x sera proportionnel à

$$\sum_y \mu_0(y)Q(y,x) = \mu_0(x)$$

car μ_0 est invariante !

Si la mesure de départ n'est pas invariante, on espère qu'on va "converger" vers la distribution invariante. Ce sera l'objet du prochain chapitre.

Proposition 13. *On suppose E fini. On sait que pour $x \in E$, pour tout $n \geq 0$, $\mu_{x,n} = (Q^n(x,y))_{y \in E} = (\mathbb{P}_x(X_n = y))_{y \in E}$ est une mesure de probabilité.*

Si il existe $x \in E$ et une mesure de probabilité π tel que pour chaque y

$$\mu_{x,n}(y) \to \pi(y),$$

alors π est une distribution invariante.

Démonstration. Soit $y \in E$. Alors on conditionne par la valeur de X_n

$$\begin{aligned}
\pi(y) = \lim_n \mathbb{P}_x(X_{n+1} = y) &= \lim_n \sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = z, X_{n+1} = y) \\
&= \lim_n \sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = z)\mathbb{P}_x(X_{n+1} = y | X_n = z) \\
&= \sum_{z\in E} \lim_n \mathbb{P}_x(X_n = z) Q(z, y) \\
&= \sum_z \pi(z)Q(z, y) = (\pi Q)(y).
\end{aligned}$$

□

C'est en fait vrai pour toute mesure initiale. La réciproque est fausse en général (considérer par exemple la matrice de transition $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, ou la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$). Elle est cependant vraie sous certaines hypothèses

Exemple 11. On considère la matrice de transition de l'exo 6

$$Q = \begin{pmatrix} a & 1-a \\ 1-a & a \end{pmatrix}$$

On a vu à l'exo 6 que si $a = 1/2$,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_1(X_n = 1) &= 1/2 + \lambda^n/2 \to 1/2, \\
\mathbb{P}_1(X_n = 2) &= 1/2 - \lambda^n/2 \to 1/2, \\
\mathbb{P}_2(X_n = 2) &= 1/2 + \lambda^n/2 \to 1/2, \\
\mathbb{P}_2(X_n = 1) &= 1/2 - \lambda^n/2 \to 1/2,
\end{aligned}$$

ou $\lambda = (2a-1) \in (-1, 1)$. donc $\mu = (1/2)\delta_1 + (1/2)\delta_2$ est une mesure invariante. (On pouvait aussi faire le calcul directement...)

Exercice 22. Donner toutes les mesures invariantes, et les probabilités invariantes, en fonction de a.

Remarquons aussi que si μ est une mesure invariante, et $t \geqslant 0$, alors $t\mu$ aussi est invariante :

$$Q(t\mu) = t(Q\mu) = t\mu.$$

En particulier, si la masse totale de μ, c'est-a-dire $\mu(E)$, est finie,

$$\pi(x) := \frac{\mu(x)}{\mu(E)}$$

est une probabilité invariante.

Modulo cette liberté, y'a-t-il beaucoup de mesures invariantes ?

Théorème 4 (Admis)**.** *Toute chaîne de Markov irréductible <u>récurrente</u> admet au plus une <u>mesure</u> invariante à une constante multiplicative près (et donc au plus une probabilité invariante).*

Aucun point n'est "oublié" par une mesure invariante :

Exercice 23. Soit μ une distribution invariante. Alors $\mu(x) \neq 0$ pour tout $x \in E$.

Correction : Comme $\sum_{y \in E} \mu(y) = 1$, il existe $y \in E$ pour lequel $\mu(y) \neq 0$. Comme la chaîne est irréductible, $\exists n \geq 0$ tel que $Q^n(y, x) > 0$. Or

$$\mu(x) = \sum_{z \in E} \mu(z) Q^n(z, x) \geq \mu(y) Q^n(y, x) > 0.$$

Il existe toujours une mesure invariante pour une chaîne récurrente. On la construit comme ceci :

Proposition 14. *Soit X une chaîne de Markov IR, et $x \in E$. On appelle μ_x la mesure définie par*

$$\mu_x(y) = \mathbb{E}_x(\sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \mathbf{1}_{X_n = y}), y \in E$$

le nombre moyen de visites en y entre 2 passages en x. Alors pour tout x, μ_x est une mesure invariante.

De plus, $0 < \mu_x(y) < \infty$ pour tout $x, y \in E$.

Comme la chaine est récurrente, on sait que $T_x^{(1)} < \infty$ p.s.. Par contre, rien n'indique que $\mathbb{E} T_x^{(1)} < \infty$.

Démonstration. Vérifions que cette mesure est bien invariante.

Soit $y \in E$.

$$\begin{aligned}
\mu_x(y) &= \mathbb{E}_x(\sum_{n\geq 1} \mathbf{1}_{X_n=y \text{ et } n\leq T_x^{(1)}}) \\
&= (\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(X_n = y \text{ et } n \leq T_x^{(1)})) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = y, X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = y | X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n)\mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \text{ on conditionne par la valeur de } X_{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} \mathbb{P}_x(X_n = y | X_{n-1} = z)\mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \\
&\quad \text{car } T_x^{(1)} \geq n \Leftrightarrow (T_x^{(1)} \leq n-1)^c \text{ est mesurable par rapport à } X_0, X_1, \dots, X_{n-1} \\
&= \sum_{n\geq 1}\sum_{z\in E} Q(z,y)\mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y) \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}_x(X_{n-1} = z, T_x^{(1)} \geq n) \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y) \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}_x(X_n = z, T_x^{(1)} \geq n+1) \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y)\mathbb{E}_x(\sum_{k=0}^{T_x^{(1)}-1} \mathbf{1}_{X_n=z}) \\
&= \sum_{z\in E} Q(z,y)\mu_x(z)
\end{aligned}$$

Montrons que $0 < \mu_x(y) < \infty$. Comme x et y communiquent, il existe $n, m > 0$ tels que $Q^n(x,y) > 0, Q^m(x,y) > 0$. Comme la mesure est invariante :

$$\mu_x(y) = (Q^n\mu_x)(y) = \sum_z Q^n(z,y)\mu_x(z) \geqslant Q^n(x,y)\mu_x(x) > 0.$$

De manière similaire,

$$1 = \mu_x(x) = \sum_{z\in E} Q^m(z,x)\mu_x(z) \geqslant Q^m(y,x)\mu_x(y),$$

donc $\mu_x(y) \leqslant (Q^m(y,x))^{-1} < \infty$.

□

Comme μ_x est une mesure invariante, si sa masse est finie, alors

$$\pi(y) = \frac{\mu_x(y)}{\mu_x(E)}, y \in E.$$

est une distribution invariante (et ne dépend pas de x).

On a

$$\mu_x(E) = \sum_{y\in E} \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} 1_{X_n=y} = \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} \sum_{y} 1_{X_n=y} = \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x^{(1)}} 1 = \mathbb{E}_x T_x^{(1)}.$$

On en déduit

$$\pi(y) = \frac{\mu_x(y)}{\mathbb{E}_x T_x^{(1)}}$$

Avec $x = y$, ça nous donne notamment une relation entre la valeur de la distribution invariante en x et le temps de retour moyen :

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x T_x^{(1)}}$$

Même si c'est théoriquement intéressant, $\mathbb{E}_x T_x^{(1)}$ (ou $\pi_x(y)$) est dur à calculer en pratique : Il faut résoudre un systèmes de $|E|$ équations a $|E|$ inconnues.

Voici un outil plus pratique :

Proposition 15. *On dit qu'une distribution μ est réversible si*

$$\mu(x)Q(x,y) = \mu(y)Q(y,x), x, y \in E.$$

Toute distribution réversible est aussi invariante

Démonstration.

$$\mathbb{P}_\mu(X_1 = x) = \sum_y \mu(y)Q(y,x) = \sum_y \mu(x)Q(x,y) = \mu(x)\sum_y Q(x,y) = \mu(x),$$

c'est-à-dire $\mu Q = \mu$. □

Exemple 12. Cherchons une éventuelle distribution invariante dans l'urne d'Ehrenfest. Commençons par chercher une mesure réversible. Une telle mesure μ doit vérifier

$$\begin{aligned} \mu(k)Q(k,k+1) &= \mu(k+1)Q(k+1,k), 0 \le k < N \\ \mu(k)(1-k/N) &= \mu(k+1)(k+1)/N \\ \mu(k+1) &= \frac{N-k}{k+1}\mu(k). \end{aligned}$$

On en déduit par récurrence

$$\mu(k) = \frac{(N-(k-1))(N-(k-2))\dots}{k(k-1)\dots}\mu(1) = \frac{(N-k+1)(N-k+2)\dots}{k(k-1)\dots}\mu(0) = C_N^k \mu(0).$$

Pour être en présence d'une distribution, il faut que la masse totale fasse 1, c'est-à-dire

$$\mu(0)\sum_{k=0}^{N} C_N^k = \mu(0)(1+1)^N = 1,$$

donc $\mu(0) = 2^{-N}$, donc $\mu = (2^{-N}C_N^k)_{k=0\dots N}$ est une distribution invariante (c'est la loi binomiale).

Exercice 24.
1. Donner une mesure invariante pour la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}$ et montrer qu'il n'existe pas de distribution invariante.
2. Montrer que la marche aléatoire dissymétrique sur $\mathbb{Z}$ admet plus d'une mesure invariante (même à une constante près). Pourquoi cela ne contredit-il pas le Théorème 4 ? Existe-t-il une distribution invariante ?

Rappelons (Exercice 15) que dans le cas de la marche symétrique, le premier temps de retour en 0 vérifie

$$\mathbb{E}_0(T_0) = \infty$$

Remarque 5. *Les équations (où les inconnues sont les $a_x, x \in E$)*

$$a_x = \sum_{y\in E} Q(y,x)a_y, x \in E,$$

qui caractérisent les mesures invariantes, sont a ne pas confondre avec les équations

$$a_x = \sum_{y\in E} Q(x,y)a_y,$$

dont la plus petite solution donne les probabilités d'absorption.

Exemple 13 (Moteur de recherche)**.** On appelle N le nombre de pages web. On considère un internaute qui surfe sur le web en cliquant au hasard sur chaque page web. On note $x \to y$ si une page x pointe vers une page y. quelle est la matrice de transition de cette chaîne de Markov ? On appelle crédit accordé par une page x à une page y la valeur

$$c_{x\to y} = \frac{\mathbf{1}_{x\to y}}{\#\text{liens dans la page } x}$$

Intuitivement, quel sera le temps moyen passé sur une page web ? Quel est le lien avec la distribution invariante ? Quel devrait être le temps de retour moyen ?

On a le théorème général :

Théorème 5. *Soit X une chaîne de Markov irréductible. Alors on a les équivalences suivantes :*

(i)X admet une distribution invariante unique, définie par

$$\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}$$

(ii) Tout état x vérifie

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) < \infty$$

(iii) Un état x le vérifie.

Démonstration. On suppose $X_0 = x$ p.s., donc $T_x = T_x^{(1)}$.

D'après la proposition 14, μ_x est une mesure invariante qui vérifie

$$\begin{aligned}\mu_x(E) &= \sum_y \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} \mathbf{1}_{X_n=y} = \mathbb{E}_x \sum_{n=1}^{T_x} \sum_y \mathbf{1}_{X_n=y} \\ &= \mathbb{E} \sum_{n=1}^{T_x} 1 = \mathbb{E}_x T_x,\end{aligned}$$

$(iii) \Rightarrow (i)$

Donc si $\mathbb{E}_x(T_x) < \infty$, $\frac{\mu_x}{\mathbb{E}_x(T_x)}$ est une distribution invariante . Comme il existe au plus une distribution invariante (à constante près), tout autre distribution invariante π' vérifie $\pi' = C\pi$ pour une certaine constante C, mais la contrainte $\sum_{x\in E} \pi(x) = \sum_{x\in E} \pi'(x) = 1$ impose $C = 1$. Donc $\pi = 1$.

$(i) \Rightarrow (ii)$ Si π est une distribution invariante, $\mu_x = \lambda\pi$ pour un certain $\lambda < \infty$, et donc

$$\mathbb{E}_x(T_x) = \mu_x(E) = \lambda < \infty,$$

pour tout $x \in E$.

□

Si X vérifie la condition (i) (ou de manière équivalente (ii) et (iii)), on dit que X est **récurrente positive**, sinon on dit qu'elle est **récurrente nulle**.

Théorème 6. *Soit X une chaîne de Markov IR sur un espace d'états <u>fini</u>. Alors X est IRP.*

Démonstration. Soit $x \in E, \mu_x$ la mesure définie à la proposition 14. Comme $\mu_x(y) < \infty$ pour $y \in E$, $\mu_x(E) = \sum_{y\in E} \mu_x(y) < \infty$, et donc

$$\pi = \frac{\mu_x}{\mu_x(E)}$$

définit une distribution invariante. □

Exercice 25. On considère une particule qui saute de sommets en sommets sur un cube en trois dimensions. Elle ne peut sauter que sur un sommet adjacent, c'est-à-dire relié par une arête. Elle n'a pas de préférence de direction.

1. Pourquoi y'a-t-il une unique distribution invariante ? Quelle est-elle ?
2. Quel est le temps moyen de retour en un sommet donné ?
3. Soit x et y deux sommets du cubes. En moyenne, combien de temps la puce passe-t-elle en x entre deux passages en y ?
4. * Soit x et y deux sommets opposés du cube (c'est-à-dire pas sur la même face). Quel est le temps moyen pour aller de x à y ?

A RENDRE : Ne rendre que les questions 1 et 2.

Exercice 26 (Remplacement de machines)**.** On modélise le cycle de renouvellement d'une machine par une chaîne de Markov. Au temps 0 on affecte une machine à une certaine fonction. La machine a une probabilité $p_i \in (0,1)$ de passer de la i-ème à la $i+1$-ème année, et si elle flanche, elle est remplacée par une machine neuve identique.

1. Ecrire le graphe de la chaine de Markov.

2. a) Montrer qu'il existe une mesure invariante μ telle que $\mu(0) = 1$ ssi

$$v_N := \prod_{k=0}^{N} p_k \to 0 \text{ quand } N \to \infty.$$

b)En utilisant le rappel sur les produits infinis, vérifier que cette condition est vérifiée ssi $\sum_{k\geq 1}(1-p_k) = \infty$.

c)En déduire que si $\sum_{k\geq 0}(1-p_k) < \infty$, $\mathbb{E}(\text{temps de remplacement}) = \infty$.

3. On suppose qu'il n'y a pas de vieillissement : la probabilité de passer de l'année i à l'année $i+1$ est la même pour tout i. On note $p \in (0,1)$ cette probabilité. Quel est le temps moyen de remplacement ? Qu'en déduit-on pour une machine qui vieillit normalement ?

Rappel sur les produits infinis.

Théorème 7. *Pour toute suite de nombres* $p_n \in (0,1]$,

$$\prod_{k=1}^{n} p_k \to l \in [0,1]$$

avec

$$l = 0 \Leftrightarrow \sum_{k\geq 0}(1-p_k) = \infty.$$

Preuve :

On pose

$$\Pi_n = \prod_{k=1}^{n} p_k,$$

on s'intéresse à la convergence de la suite Π_n. On a $\Pi_n > 0$ et

$$\log(\Pi_n) = \sum_{k=1}^{n} \log(p_k)$$

et Π_n converge ssi $\log(\Pi_n)$ converge. Il faut donc au moins que $\log(p_k) \to 0$ et donc que $p_k \to 1$.

Remarquons que si p_k ne tend pas vers 1 il existe $\eta < 1$ tel que $p_k \leq \eta$ pour une infinité de k et donc pour tout $q \geq 0$ on a $\Pi_n \leq \eta^q$ pour n suffisamment grand, d'ou $\Pi_n \to 0$.

Si par contre $p_k \to 1$ on pose $q_k = 1 - p_k \to 0$ et on a

$$\log(p_k) = \log(1 - q_k) \sim -q_k$$

et donc les stg $\log(p_k)$ et $-q_k$ ont même nature.

Donc $\Pi_n \to 0$ ssi $\log(\Pi_n) \to -\infty$ ssi $\sum q_k = \infty$.

4.1 Convergence à l'équilibre

Peut-on dire que si π est une distribution invariante, alors la loi de X_n converge vers π ? La réponse est vraie sous certaines hypothèses, mais il faut tout de même exclure certaines situation désagréables...

Exemple 14. Soit la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Le distribution $(1/2)(\delta_1 + \delta_2)$ est invariante, mais comme X_n oscille indéfiniment entre 1 (n pair) et 2 (n impair), sa loi ne peut pas converger...

Définition 9. *Une chaîne irréductible est dite apériodique ssi pour tout $x \in E$ $Q^n(x,x) > 0$ pour n suffisamment grand.*

A l'inverse, pour une chaine périodique, il existe un entier $p > 1$ minimal, appelée période, tel que pour un certain $x \in E$ et un certain entier k, pour tout $n \geq 1$,

$$Q^{k+np}(x,x) = 0.$$

(admis)

Théorème 8. *Une chaine est apériodique si pour un $x \in E$ le pgcd de tous les temps n tels que $Q^n(x,x) > 0$ est 1 .*

Démonstration. Si ce n'est pas le cas, soit $p > 1$ le pgcd. Pour $k > 0$, posons $n = kp+1$. Alors, comme p ne divise pas n, on a $Q^n(x,x) = 0$. Il y a une infinité de n comme ca, donc la chaine a une période de p.

Montrons que si la propriété est vérifiée par un x, alors elle l'est par tous les éléments de E. Soit $y \in E$. Soit $m, m' > 0$ tel que $Q^{m'}(x,y) > 0, Q^m(y,x) > 0$. Si $Q^{k+np}(y,y) > 0$, on a $Q^{m+k+np+m'}(x,x) > 0$, ce qui est faux. Donc y n'est pas périodique. $\square$

Théorème 9 (Convergence à l'équilibre)**.** *Soit X une chaîne de Markov IRPA. Supposons que π soit une distribution invariante pour X. Alors pour tout $x \in E$,*

$$\mathbb{P}_x(X_n = y) \to \pi(y).$$

Démonstration. On va utiliser un couplage : Soit $Y = (Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q et de distribution initiale π. Alors on définit

$$\mathcal{X}_n = (X_n, Y_n).$$

"Le futur ne dépend que du présent", donc $\mathcal{X}$ est une chaîne de Markov .

Elle est de plus irréductible car pour aller d'un état (x,x') à un état (y,y') on choisit $q > q'$ tels que $\mathbb{P}(x \xrightarrow{q} y) > 0$ et $\mathbb{P}(x' \xrightarrow{q'} y') > 0$. On sait de plus que pour tout $n \geq n_0$, $\mathbb{P}(x \xrightarrow{n} x) > 0$ et $\mathbb{P}(x' \xrightarrow{n} x') > 0$. On a alors pour la chaîne $\mathcal{X}$:

$$\mathbb{P}\left(\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{n_0} x & \xrightarrow{q} y \\ x' & \xrightarrow{n_0+q-q'} x' & \xrightarrow{q'} y' \end{array}\right) > 0$$

c'est-à-dire

$$\mathbb{P}((x,x') \xrightarrow{n_0+q} (y,y')) > 0,$$

donc $\mathcal{X}$ est irréductible.

De plus la distribution $\Pi(x,y) = \pi(x)\pi(y)$ est invariante pour $\mathcal{X}$ car

$$\mathbb{P}_\Pi(\mathcal{X}_1 = (x,y)) = \mathbb{P}_\pi(X_1 = x)\mathbb{P}_\pi(Y_1 = y) = \pi(x)\pi(y)$$

. Le chaîne $\mathcal{X}$ est donc récurrente positive.

On choisit arbitrairement un état $x \in E$ et on pose

$$\mathcal{T} = \min\{n : \mathcal{X}_n = (x,x)\} = \min\{n : X_n = Y_n = x\}.$$

$\mathcal{T}$ est un temps d'arrêt car c'est le temps de retour en (x,x). Comme $\mathcal{X}$ est irréductible récurrente, $\mathcal{T} < \infty$ p.s..

On pose

$$Z_n = \begin{cases} X_n \text{ si } n \leq \mathcal{T} \\ Y_n \text{ si } n > \mathcal{T}. \end{cases}$$

On utilise une astuce pour montrer que $Z = (Z_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov de même matrice de transition que X et Y et de loi initiale ($Z_0 = X_0 = x$).

Comme $\mathcal{T}$ est un temps d'arrêt, d'après la Propriété de Markov forte,

$$(\mathcal{X}_{\mathcal{T}+n})_{n \geqslant 0}$$

est une chaîne de Markov de même matrice de transition que $\mathcal{X}$, de loi initiale (x, x), et indépendante de $(\mathcal{X}_n, n \leqslant \mathcal{T})$.

Soit $\mathcal{X}' = (Y, X)$ obtenue en échangeant les coordonnées de $\mathcal{X}$. Pour les mêmes raisons, $(\mathcal{X}'_{\mathcal{T}+n}, n \geqslant 0)$ a la même loi que $(\mathcal{X}'_n, n \geqslant 0)$, et est indépendante de $(\mathcal{X}'_n, n \leqslant \mathcal{T})$, et donc de $(\mathcal{X}_n, n \leqslant \mathcal{T})$. Remarquons que $(\mathcal{X}_n, n \leqslant \mathcal{T})$ et $(\mathcal{X}'_n, n \leqslant \mathcal{T})$.

Donc, $\mathcal{X}''$, qu'on construit en collant $(\mathcal{X}_n, n \leqslant \mathcal{T})$, et $(\mathcal{X}'_n, \mathcal{T} + n, n \geqslant 0)$, a la même loi que $\mathcal{X}$. En regardant la 1re coordonnée de cette égalité en loi, on en déduit que Z a la même loi que X.

Donc pour tout n, Z_n a la même loi que X_n (c'est-à-dire $\mathbb{P}_x(Z_n = y) = Q^n(x, y)$). Comme π est invariante et est la loi de Y_0, c'est aussi la loi de Y_n et on a

$$\begin{aligned}
|\mathbb{P}(X_n = y) - \pi(y)| &= |\mathbb{P}(Z_n = y) - \mathbb{P}(Y_n = y)| \\
&= |\mathbb{P}(Z_n = y, n \leq \mathcal{T}) + \mathbb{P}(Z_n = y, n > \mathcal{T}) - \mathbb{P}(Y_n = y, n > \mathcal{T}) + \mathbb{P}(Y_n = y, n \leq \mathcal{T})| \\
&= |\mathbb{P}(Z_n = y, n \leq \mathcal{T}) + \mathbb{P}(Z_n = y, n > \mathcal{T}) - \mathbb{P}(Z_n = y, n > \mathcal{T}) + \mathbb{P}(Y_n = y, n \leq \mathcal{T})| \\
&= |\mathbb{P}(X_n = y, n \leq \mathcal{T}) \\
&\leq \mathbb{P}(n \leq \mathcal{T}) \to 0
\end{aligned}$$

car $\mathcal{T} < \infty$ p.s.. $\square$

Exercice 27. Soit Q une matrice stochastique de taille N, et λ une valeur propre complexe de Q de module 1. Montrer que λ est une racine de l'unité. (Indication : Commencer par le cas ou la chaîne de Markov correspondante est irréductible et apériodique).

Conclusion : Une "bonne" chaîne de Markov est une chaîne de Markov IRPA ; car elle admet automatiquement une distribution invariante.

Exercice 28. Soit X une chaîne de Markov IRP. On suppose que $X_0 \sim \pi$ suit la loi invariante. On pose

$$\tau = \min\{n \geq 1 : X_n = X_0\}.$$

1.Montrer que $\mathbb{E}(\tau) = |E|$ est le nombre d'états possibles (en particulier $\mathbb{E}(\tau) = \infty$ si il y a une infinité d'états). Est-ce en contradiction avec le fait que pour tout $x \in E$, $\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \frac{1}{\pi(x)} < \infty$?

2. En déduire que si E est infini, "de nombreux états ont un grand temps de retour", c'est-à-dire que pour chaque $M > 0$, il y a une infinité de $x \in E$ tels que $\mathbb{E}_x(T_x) \geq M$. (En lien avec $\pi(x) = \mathbb{E}_x(T_x)^{-1}$, ce sont les états les "moins probables" qui ont les plus grands temps de retour).

Exercice 29 (Moteur de recherche)**.** Le concepteur d'un moteur de recherches souhaite classer les pages internet du web W (au nombre de N) dans l'ordre d'importance, afin qu'après une requête les pages les plus importantes arrivent en premier.

Il s'agit donc de définir la notion d'importance. On note $x \to y$ si une page x pointe vers une page y, et on appelle crédit accordé par une page x à une page y la valeur

$$c_{x\to y} = \frac{\mathbf{1}_{x\to y}}{\#\text{liens dans la page } x}$$

On décide qu'on appellera "importance" une grandeur I_x qui vérifie

$$I_y = \sum_{x\to y} c_{x\to y} I_x,$$

autrement dit l'importance d'une page est la somme des importances des pages qui pointent vers elle, pondérées par le crédit que chacune de ces pages apporte à y.

On suppose qu'il existe toujours une suite de liens qui mène d'une page vers une autre.

1. Montrer qu'il existe bien une telle grandeur $I_x, x \in W$, et l'écrire comme la distribution stationnaire d'une chaîne de Markov .

2. Donner un exemple (simpliste) ou cette chaîne est périodique. Montrer que si une des pages pointe vers elle-même, alors la chaîne est apériodique. L'hypothèse d'apériodicité est donc plausible...Donnez un autre exemple simple où la chaine est apériodique.

3. Un surfeur surfe le web en cliquant au hasard sur les liens de chaque page. On suppose que n pages $x_1, \dots, x_n$ ont chacune un unique lien qui pointe vers une page y. Montrer que

$$\frac{1}{\mathbb{E}_y(T_y^{(1)})} = \sum_i \frac{1}{\mathbb{E}_{x_i}(T_{x_i}^{(1)})}.$$

En quoi cela justifie-t-il dans ce cas particulier l'assertion que une page importante sera visitée plus souvent qu'une page moins importante ? (on suppose la chaine apériodique).

Démonstration.

1. La chaine est irréductible finie, donc récurrente positive, donc il existe une distribution invariante. On pose $I = \pi$ et c'est bon.
2. Soit $x \in E$ qui pointe vers lui-même.Le PGCD des temps de retour en x est donc 1.
3. La chaine est IRPA, donc d'après le théorème , $\pi(x) = \frac{1}{\mathbb{E}T_x^{(1)}}$. Comme la mesure est invariante,

$$\pi(x) = \sum_{y\to x} \pi(y) Q(y,x).$$

$Q(y,x) = 1$ car le lien est unique, ce qui prouve la relation demandée.

□

Exercice 30. Soit X une chaîne de Markov à espace d'états E fini, avec des classes récurrentes $R_1, R_2, R_3, \dots$ et des classes transientes $T_1, T_2, T_3, \dots$.

1. Montrer que toute mesure invariante μ vérifie $\mu(T_i) = 0$ pour tout i.

2. Comme les classes récurrentes sont fermées (on ne peut pas passer d'une classe récurrente à une autre classe), on peut considérer la chaîne de Markov sur chaque classe séparément. On note μ_i une mesure invariante pour la classe R_i.

Pour tout i, soit $\lambda_i \geq 0$ un nombre positif. Montrer que

$$\mu(x) = \begin{cases} \lambda_i \mu_i(x) \text{ si } i \in R_i, \\ 0 \text{ si } x \in T_j \text{ pour un certain } j, \end{cases}$$

est une mesure invariante.

3. Montrer que toute mesure invariante peut s'écrire de cette manière.

4. En déduire qu'il peut y avoir plusieurs distributions invariantes.

4.2 Théorème ergodique

Bilan :

— Quelconque : On divise entre classes récurrentes et transientes. Une mesure invariante vaut 0 sur les points transients.

— Irréductible récurrente (ou LA classe récurrente d'une chaine irréductible) : Il existe une mesure invariante.

— Irréductible récurrente positive : Il existe une distribution invariante π.

— Irréductible récurrente positive apériodique : X_n converge en loi vers π ET théorème ergodique (voir après).

Le théorème 9 nous dit que si X est une chaîne IRPA la loi de X_n converge vers la distribution invariante π,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \pi.$$

En revanche, pour chaque trajectoire, X_n ne converge pas car il ne cesse de sauter d'un état à l'autre. On peut par contre dire que p.s. X_n converge en moyenne en un certain sens (rappelons-nous que X_n n'est pas forcément un nombre...)

Le théorème de convergence en moyenne p.s. par excellence est la loi des grands nombres :

Théorème 10 (LGN)**.** *Soit $(V_n)_n$ des variables IID positives. Alors p.s.*

$$\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} V_k \to \mathbb{E}(V_1).$$

Rappel : Convergence de Césaro.

Soit $(U_n)_{n \geqslant 1}$ une suite. On appelle moyenne (de Césaro) de U_n la suite

$$M_n = \frac{U_1 + \cdots + U_n}{n}.$$

Théorème 11. *Si $U_n \to l$, alors $M_n \to l$.*

Par contre la réciproque est fausse. Par exemple, la suite $U_n = (-1)^n$ converge en moyenne vers 0, alors que U_n ne converge pas. La théorème ergodique est un résultat de convergence en moyenne, plus faible que le résultat de convergence à l'équilibre (par contre, il demande moins d'hypothèses).

Pour les chaines de Markov on a le même phénomène :

Théorème 12 (Théorème ergodique)**.** *Soit X une chaîne de Markov irréductible de distribution initiale une probabilité μ_0. Pour $n \geq 1$, on note $V_x(n)$ le nombre de visites en x avant le temps n*

$$V_x(n) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k = x}.$$

Alors pour tout état $x \in E$ p.s.

$$\frac{1}{n} V_x(n) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{1}_{X_k = x} \to \frac{1}{\mathbb{E}_x(T_x^{(1)})}.$$

Remarque 6. *Comme on a pas fait d'hypothèse de récurrence, cette dernière quantité peut être nulle.*

Démonstration. Si la chaîne est transiente, le nombre de visites est p.s. fini et

$$\frac{V_x(n)}{n} \to 0 = \frac{1}{\mathbb{E}(T_x^{(1)})}$$

p.s..

Supposons la chaîne récurrente. Supposons $X_0 = x$, et posons $T_x^{(0)} = 0$. On appelle $S_x^r = T_x^{(r)} - T_x^{(r-1)}$ la r-ème excursion entre 2 passages en x, pour $r \geq 1$. On a vu que les S_x^r sont des variables iid d'espérance

$$\mathbb{E}(S_x^1) = \mathbb{E}(T_x^{(1)}).$$

D'après la LGN,

$$\frac{U_t = S_x^{(1)} + S_x^{(2)} + \cdots + S_x^t}{t} \to \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) p.s. \tag{2}$$

quand $t \to \infty$. Comme il y a eu $V_x(n)$ visites au temps n, on a

$$U_{V_x(n)} \leq n \leq U_{V_x(n)+1}.$$

$$\frac{U_{V_x(n)}}{V_x(n)} \leq \frac{n}{V_x(n)} \leq \frac{U_{V_x(n)+1}}{V_x(n)} = \frac{U_{V_x(n)+1}}{V_x(n)+1} \frac{V_x(n)+1}{V_x(n)},$$

en utilisant 2 et le fait que $V_x(n) \to \infty$ p.s. on a

$$\frac{n}{V_x(n)} \to \mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) p.s.$$

$\square$

Exercice 31. A l'aide du théorème ergodique, démontrer la proposition ci-dessous.

Proposition 16. *Soit X une chaîne de Markov irréductible récurrente positive de loi stationnaire π.*

Soit f une fonction bornée de $E \mapsto \mathbb{R}$. On appelle

$$\bar{f} = \sum_x f(x)\pi(x)$$

la valeur moyenne de f par rapport à la mesure π.

Alors

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_k) \to \bar{f}.$$

Démonstration. : Exercice : Commencer par le cas ou E est fini. □

Exercice 32. On reprend l'exercice de renouvellement des machines. On suppose désormais que la casse d'une machine a un cout très élevé, noté $a > 0$. L'utilisateur décide alors d'adopter la politique suivante : Il fixe un âge limite L, et si la machine arrive à l'âge L, alors il la remplace par une nouvelle machine, ce qui lui occasionne un cout $b > 0$. On suppose évidemment que $b < a$, sinon cette politique est inutile.

1. Ecrire la chaîne de Markov correspondante. Etudier les mesures et probabilités invariantes.

2. Montrer que le cout au temps n s'écrit

$$C_n = (b - a)V_L(n) + aV_0(n) - a,$$

ou $V_x(n)$ est le nombre de visites en x avant le temps n.

3. On note $v_k = p_0 \dots p_{k-1}$ pour $k \geq 1$. Calculer le cout limite moyen

$$m = \lim_n \frac{C_n}{n}.$$

4. Calculer le cout moyen quand on suppose un vieillissement constant de paramètre $p \in (0, 1)$).

4) Dans le cas d'un vieillissement constant, on a $p_k = p$, et donc

$$s = \sum_{k=0}^{L-1} p^k = \frac{1 - p^L}{1 - p},$$

et donc

$$\pi(0) = \frac{\mu(0)}{s} = \frac{1 - p}{1 - p^{L-1}}$$
$$\pi(L) = \frac{\mu(L)}{s} = \frac{p^{L-1}(1 - p)}{1 - p^{L-1}},$$

et donc le cout moyen est

$$\gamma(L) = \frac{C_n}{n} = \frac{1-p}{1-p^{L-1}} \left(bp^{L-1} + (b-a)\right)$$

4.3 Arithmétique et chaîne de Markov

On jette un dé à 6 faces n fois, et on appelle X_n la somme de tous les résultats obtenus. On veut calculer

$$\lim_n \mathbb{P}(X_n \text{ est un multiple de } 13).$$

1. Montrer que X_n est une chaîne de Markov. Pourquoi ne peut-on appliquer le théorème de convergence vers l'équilibre ?
2. On considère $\overline{X_n}^{13} \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$ le reste de la division euclidienne de X_n par 13. Montrer que c'est une chaîne de Markov irréductible récurrente positive apériodique. En déduire le résultat.
3. On pose $Y_n = 5X_n$. Calculer
$$\lim_n \mathbb{P}(Y_n \text{ est un multiple de } 13).$$
Calculer
$$\lim_n \mathbb{P}(Y_n \text{ est un multiple de } 10).$$
4. On considère cette fois P_n le produit de tous les résultats obtenus après n lancers, en supposant $P_0 = 1$.
a)Calculer
$$\lim_n \mathbb{P}(P_n \text{ est un multiple de } 13)$$
$$\lim_n \mathbb{P}(P_n \equiv 1[13])$$
b) Etudier $\overline{Y_n}^4$ le reste de la division euclidienne de X_n par 4. Calculer
$$\lim_n \mathbb{P}(Y_n \text{ est un multiple de } 4).$$
Que se passe-t-il si on remplace 4 par un autre nombre ?
5. Dans toutes les situations précédentes, calculer le nombre moyen de visites à l'état désiré, c'est-à-dire
$$\lim_n \frac{\#\{n : X_n \text{ est un multiple de } 13/10/4...\}}{n}.$$

Correction :

1. X_n n'est pas récurrente.
2. Soit deux états $x, y \in \{0, 1, 2, \dots, 12\}$. Supposons par exemple $x < y$. Si on fait $y - x$ 1 de suite (ce qui a une probabilité non-nulle), alors on passe de x à y, donc $Q^n(x, y) > 0$ pour $n = y - x$. Si $x > y$, on peut suivre le chemin $x \to x + 1 \to \dots 13 = 0 \to 1 \to \cdots \to y$ avec une probabilité non-nulle. Donc la chaîne est irréductible. Comme l'espace d'états est fini, elle est aussi récurrente positive.

Comme chaque point x à 6 antécédents $x-1,\dots,x-6$ et 6 destinations équiprobables $(x+1,\dots,x+6)$, on montre facilement que la distribution uniforme $\pi(x)=\frac{1}{13}$ est la distribution stationnaire.

Pour montrer qu'elle est apériodique, on considère $x\in E$. Comme on peut faire six 1 de suite avec probabilité >0, $Q^6(x,x)>0$. Si on fait un 2 puis quatre 1, on retombe sur x, et on a donc $Q^5(x,x)>0$. On a donc $Q^{n_0}(x,x)>0$ et $Q^{n_0+1}(x,x)>0$ avec $n_0=5$, et la chaîne est donc apériodique. En utilisant le théorème de convergence à l'équilibre, on en déduit

$$\lim_n \mathbb{P}(X_n \text{ est un multiple de } 13)=\lim_n \mathbb{P}(\overline{X_n}^{13}=0)\to\pi(0)=\frac{1}{13}.$$

3. La situation est un peu plus compliquée car on fait des sauts de 5 en 5 (modulo 13), on a le graphe suivant

$$0\to 5\to 10\to 15=2\to 7\to 12\to 17=4\to 9\to 14=1\to 6\to 11\to 16=3\to 8\to 0\to \textit{etc...}$$

On peut encore aller de n'importe quel point à n'importe quel autre point en faisant suffisamment de 1 de suite, la chaîne est donc irréductible, et donc récurrente positive. La distribution stationnaire est encore $\pi(x)=1/13$.

L'apériodicité se traite comme dans le cas précédent : En considérant deux chemins allant d'un point x à lui-meme, l'un ne comportant que des 1, et l'autre comportant un 2 et que des 1, on montre que la chaîne est apériodique. On a donc la même conclusion qu'à la question précédente.

Si on s'intéresse désormais à la chaîne $\overline{X_n}^{10}$, la situation n'est pas la même. On ne peut effectuer que des transitions du type

$$0\to 5\to 10=0\to 5\to 10...$$

Donc $\overline{X_n}\in\{0,5\}$ tout le temps. Si on est en 0 et qu'on fait $2,4$ ou 6, on reste en 0, autrement on reste en 5. La chaîne a donc la matrice de transition

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$$

et la distribution invariante $(1/2,1/2)$.

4. a) Regardons cette fois ce qui se passe si on ne fait que des 2.

$$1\to 2\to 4\to 8\to 16=3\to 6\to 12\to 24=11\to 22=9\to 18=5\to 10\to 20=7\to 14=1$$

On ne passera jamais par 0 ! Donc $\mathbb{P}(X_n \text{ est un multiple de } 13)=0\to 0$... A part 0, on peut passer par tous les états, donc la chaîne est IRP. Elle est aussi apériodique pour des raisons similaires aux questions précédentes car un chemin $2,2,2,...$ peut être raccourci d'une longueur en faisant $4,2,2,...$

La distribution stationnaire est encore $\pi(x) = 1/12$, et on a pour 1 comme pour un autre état non-nul

$$\mathbb{P}(X_n = 1[13]) \to \frac{1}{12}.$$

b) Cette fois on considère la valeur de Y_n modulo 4. On a

$$\begin{aligned} 0 &\to 0 \\ 1 &\to 1, 2, 3, 0 \\ 2 &\to 2, 0 \\ 3 &\to 3, 2, 0. \end{aligned}$$

Donc $\{0\}$ est une classe récurrente, et comme tout autre état mène à 0, les autres états sont transients. On en déduit que la chaîne passera par 0 et qu'elle y restera constamment, donc

$$\lim_n \mathbb{P}_n(X_n = 0[4]) = 1.$$

La différence avec 13 est la suivante : Si $X_n = 13$, cela signifie qu'on a pu multiplier les lancés successifs $L_1, L_2, \ldots$ pour obtenir 13 :

$$13 = D_1 D_2 ... D_n.$$

Ceci dit, comme la seule décomposition de 13 en nombres premiers est

$$13 = 1 \times 13,$$

cela veut dire qu'un des lancés est égal à 13, ce qui est impossible.
On peut en déduire de la même manière que tout nombre k pour lequel un nombre premier différent de $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ apparait dans sa composition vérifiera

$$\mathbb{P}(X_n = 0[k]) \to 0.$$

Si par contre k peut s'écrire

$$k = p_1 p_2 ... p_q$$

avec $p_q \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$, ce n'est qu'une question de temps avant que la chaîne n'effectue la séquence

$$p_1, p_2, ..., p_q$$

ce qui implique que k sera inéluctablement un facteur de X_n pour un n suffisamment large, et donc

$$\lim \mathbb{P}(X_n = 0[k]) \to 1.$$

5. Le théorème ergodique s'applique à toute chaîne irréductible. Pour les questions 1$\to$ 5.b), on a donc

$$... \to \pi(x)$$

qui vaut selon les questions $\frac{1}{13}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{12}$ ou 1.

4.4 Marche aléatoire sur un graphe.

On appelle graphe un ensemble de points E, et un ensemble d'arêtes A qui à chaque paire de points x, y associe $a(x, y)$ qui vaut 0 ou 1. Si $a(x, y) = 1$, on dit que x et y sont connectés, ou voisins, et on note $x \sim y$. On appelle degré de x et on note $d(x)$ le nombre de voisins de x.

On considère la chaîne de Markov X_n qui se déplace aléatoirement en sautant d'un point à un autre, sachant que :

1. D'un point x, on ne peut aller que sur un voisin de x,
2. Tous les voisins de x ont la même probabilité d'être choisis.

1. **Introduction.** Donner une expression de $Q(x, y)$, la matrice de transition.

2. **Irréductibilité.**

On dit que deux points x et y sont reliés dans le graphe si il existe une suite de points $x_0 = x, x_1, \ldots, x_k = y$ tels que $x_i \sim x_{i+1}$. On dit que le graphe est connexe si tous les points sont reliés.

Donner un exemple de graphe qui n'est pas connexe. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que la chaîne soit irréductible.

On suppose dans la suite que le graphe est connexe.

3. **récurrence**.

a) On suppose que E est fini. Montrer que la chaîne est irréductible récurrente positive.

b) Donner des exemples de graphes ou la chaîne est récurrente mais pas récurrente positive, et ou la chaîne de Markov n'est même pas récurrente. (On pourra utiliser les résultats sur la marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^d$).

Calculer $d(x)$ pour la marche aléatoire symétrique sur $\mathbb{Z}^d$. 4. **mesures invariantes** On définit la mesure suivante sur le graphe :

$$\mu(x) = d(x).$$

a) Montrer que μ est une mesure réversible.

b) On suppose que E est fini. Donner une distribution invariante de la chaîne de Markov. En existe-t-il d'autres ?

c) On suppose le graphe fini et connexe. Donner l'espérance du temps de retour en un point x.

d) On suppose dans cette question que le graphe est fini, mais plus qu'il est connexe. Peut-il exister plusieurs mesures invariantes ? Donner la forme générale de toutes les mesures invariantes.

5. **Mesure d'occupation**

a) Donner un exemple de graphe non-apériodique.

b) On considère le graphe suivant : ... A votre avis, la chaîne va-t-elle passer plus de temps en x ou en y ? Le graphe est-il apériodique ?

c) On suppose le graphe apériodique. Soit x un point du graphe. Montrer que, quelle que soit la distribution initiale,

$$\mathbb{P}(X_n = x) \to \frac{d(x)}{2\#A}.$$

En déduire la vraie réponse à la question b).

6. **Théorème ergodique.** Déterminer le temps moyen passé par la chaîne en un point x.

7. **Application aux échecs**.

a) On considère une tour que l'on déplace aléatoirement sur un échiquier (8x8 cases). Chacune des cases qui lui sont accessibles ont même probabilité à chaque coup. On rappelle qu'une tour ne peut faire qu'un mouvement horizontal ou vertical à chaque coup. Quel est le temps moyen de retour au point de départ ? (en fonction du point de départ ?). Quelle est la période ?

b) même question pour un cavalier (mouvements autorisés : 2 cases dans une direction puis 1 case dans l'autre direction).

c) même question pour un fou (mouvement uniquement diagonaux).

correction : 1.
$$Q(x,y) = \frac{1_{x\text{voisin de } y}}{d(x)}.$$

2. La chaîne est irréductible si pour tous points x, y il existe des états $x_1 = x, \dots, x_q = y$ tels que chaque transition $Q(x_i, x_{i+1})$ soit > 0, c'est-à-dire si le graphe est connexe.

3.a) Toute chaîne de Markov irréductible finie est récurrente positive.

b)On a vu dans l'exo correspondant que la marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^2$ était récurrente, mais pas récurrente positive. La marche aléatoire sur $\mathbb{Z}^d, d \geq 3$ n'est même pas récurrente. Pourtant ces chaîne de Markov ont bien une structure de graphe, les voisins d'un point x étant tous les points reliés à x dans la grille $\mathbb{Z}^d$ (on a d'ailleurs dans ce cas $d(x) = 2d$).

4. a) Soit x, y. On a
$$\mu(x)Q(x,y) = d(x)\frac{\mathbf{1}_{x\sim y}}{d(x)} = \mathbf{1}_{x\sim y} = \mu(y)Q(y,x),$$
donc la mesure est réversible.

b) Comme la chaîne est IRP il existe une unique distribution stationnaire π. Comme μ est réversible, elle est invariante, et comme elle a une masse finie et est invariante, on a
$$\pi(x) = \frac{\mu(x)}{\mu(E)}.$$
On a
$$\mu(E) = \sum_{x\in E} \mu(x) = \sum_{x\in E} d(x) = \sum_{x\in E, y\in E} \mathbf{1}_{x\sim y} = 2\#A,$$
le facteur 2 dans la somme précédente venant du fait que chaque couple (x, y) est compté 2 fois ((x, y) et (y, x)).

On a donc
$$\pi(x) = \frac{d(x)}{2\#A}.$$

d) Supposons que E soit l'union disjointe de sous-ensembles $E_1, E_2, \dots,$ chaque sous-ensemble E_i étant connexe pour la structure d'arêtes A. Sur chaque

E_i, on note π_i l'unique distribution invariante correspondante, donnée d'après c) par

$$\pi_i(x) = \frac{d(x)}{\# A_i}, x \in E_i,$$

A_i étant le nombre d'arêtes impliquant des points de E_i.

Soit $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ des nombres positifs tels que

$$\sum_i \alpha_i = 1.$$

On pose

$$\pi(x) = \begin{cases} \alpha_i \pi_i(x) \text{ si } x \in E_i. \end{cases}$$

π est une mesure, et c'est une mesure de probabilités car

$$\mu(E) = \sum_i \mu(E_i) = \sum_i \alpha_i \pi_i(E_i) = \sum_i \alpha_i = 1.$$

Montrons que π est stationnaire.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\pi(X_1 = x) &= \sum_i \sum_{x \in E_i} \mathbb{P}(X_0 = x)\mathbb{P}_x(X_1 = x) \\
&= \sum_i \alpha_i (\sum_{x \in E_i} \pi_i(x) \mathbb{P}_x(X_1 = x)) \\
&= \sum_i \alpha_i \pi_i(x) = \pi(x)
\end{aligned}$$

ou à l'avant-dernière ligne on a utilisé le fait que π_i est stationnaire pour la restriction de la chaîne à E_i.

On remarque en particulier qu'il y a une infinités de distributions invariantes.

Supposons pour la réciproque que π soit une distribution invariante. On appelle toujours π_i l'unique distribution invariante sur E_i.

On pose $\alpha_i = \pi(E_i) = \mathbb{P}(X_0 \in E_i)$ si X_0 a probabilité π. Si $\alpha_i \neq 0$ on considère la chaîne $X^{(i)}$ définie comme X conditionnée par le fait que $X_0 \in E_i$. C'est une chaîne de Markov à valeurs dans E_i. Sa distribution initiale est, pour $x \in E_i$,

$$\mathbb{P}(X_0^{(i)} = x) = \mathbb{P}(X_0 = x | X_0 \in E_i) = \frac{\mathbb{P}(X_0 = x)}{\mathbb{P}(X_0 \in E_i)} = \frac{\pi(x)}{\alpha_i}.$$

La distribution de $X_1^{(i)}$ est, pour $x \in E_i$,

$$\mathbb{P}(X_1^{(i)} = x) = \frac{\mathbb{P}_\pi(X_1 = x, X_0 \in E_i)}{\mathbb{P}(X_0 \in E_i)} == \frac{\mathbb{P}_\pi(X_1 = x)}{\mathbb{P}(X_0 \in E_i)} = \frac{\pi(x)}{\alpha_i}$$

car π est invariante pour X. La troisième inégalité provient du fait que si $X_1 \in E_i$, comme les E_i sont non-connectés, alors X_0 est aussi nécessairement dans E_i. On en déduit que $\frac{\pi}{\alpha_i}$ est une distribution stationnaire pour $X^{(i)}$, elle est donc égale à l'unique distribution stationnaire π_i sur E_i. On a donc

$$\pi(x) = \alpha_i \pi_i(x), x \in E_i$$

(le cas $\alpha_i = 0$ se traite aisément). On a de plus

$$1 = \sum_x \pi(x) = \sum_i \sum_{x \in E_i} \alpha_i \pi_i(x) = \sum_i \alpha_i.$$

On a donc montré que toute distribution invariante s'écrivait sous cette forme.

5.c) Il faut appliquer le théorème de convergence à l'équilibre, la chaîne étant IRPA.

6)La chaîne étant irréductible, on a

$$\frac{V_n(x)}{x} \to \pi(x) = \frac{d(x)}{2\#A}.$$

7)a) Chaque case de l'échiquier est connectée avec 7 autres cases horizontalement, et 7 autres cases verticalement. On a donc pour tout x $d(x) = 14$. La chaîne est irréductible (la tour peut aller n'importe ou en 2 coups), et donc IRP. La distribution invariante est

$$\pi(x) = \frac{d(x)}{\sum_{x \in E}} = \frac{14}{64 * 14} = \frac{1}{64},$$

c'est la distribution uniforme.

On a donc pour tout x

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \frac{1}{\pi(x)} = 64.$$

Comme la tour peut aller n'importe ou en $n_0 = 2$ ou $n_0 + 1 = 3$ coups, la chaîne est apériodique (on peut donc appliquer le théorème de convergence à l'équilibre.)

b)Cette fois, les cases n'ont pas toutes le même nombre de voisins. Les cases situées à au moins 2 cases du bord, de type 1, au nombre de n_1=4x4=16, ont chacune $v_1 = 8$ voisins.

Les cases situés à une case d'un bord et au moins 2 cases d'un autre, de type 2, au nombre de n_2 =16, ont chacune $v_2 = 6$ voisins.

Les cases situées sur un bord, et à au moins 2 cases d'un autre bord, de type 3, au nombre de n_3 =16, ont chacune $v_3 = 4$ voisins.

Les cases situées en diagonale d'u coin, c'est-à-dire B2 et symétriques, au nombre de n_4 =4, de type 5, ont chacune $v_4 = 4$ voisins.

Les cases à une case du coin, c'est-à-dire A2, B1 et symétriques, de type 5, au nombre de n_5 =8, ont chacune $v_5 = 3$ voisins.

Enfin les coins, de type 6, au nombre de $n_6 = 4$, ont chacun $v_6 = 2$ voisins.

On a bien $\sum_i n_i$ =16+16+16+4+8+4=64 cases.

Pour calculer la distribution de retour, il faut connaître le nombre total d'arêtes,

$$\sum_x d(x) = \frac{1}{2}\sum_i n_i v_i = \frac{1}{2}(16(8+6+4)+4*4+8*3+4*2) = \frac{16}{2}(19+2) = 8*21 = 168.$$

Le temps de retour en partant d'une case x qui est de type i est donc

$$\mathbb{E}_x(T_x^{(1)}) = \frac{v_i}{168}.$$

Nous allons montrer que la période est de 2. Etant donné une case x sur la i-ème ligne et la j-ème colonne, on pose

$$n_x = i + j[2] \in \{0, 1\}.$$

Si l'on bouge le cheval d'une case $x = (i, j)$ à une case $y = (i', j')$, on a

$$n_x - n_y = i - i' + j - j' = 2 + 1 = 1[2].$$

Donc si X_n est la position de la chaîne de Markov la suite n_{X_n} effectue ...$0 \to 1 \to 0 \to 1 \to 0 \to$ .... Il est donc impossible pour X_n de revenir sur ses pas en un nombre impair de coups (si on part à $n_{X_0} = 0$, pour n impair on a $n_{X_n} = 1$ donc $X_n \neq X_0$). La période est donc un multiple de 2.

On peut montrer avec un dessin qu'on peut revenir sur ses pas en $n_0 = 4$ ou $n_0 + 2 = 6$ coups. La période est donc au maximum de 2. On en déduit que la période est de 2.

c) Concernant le fou, il faut tout d'abord noter que la chaine n'est pas irréductible (le fou reste soit sur les cases noires, soit sur les cases blanches). Il faut donc étudier la chaine au sein des 2 classes irréductibles. Il faut compter tous les cas comme dans le cas du cavalier pour obtenir les temps de retour. Comme pour la tour, la chaine est apériodique.

5 Chaines de Markov et simulation

Etant donné une probabilité π, le but de cette section est de proposer des méthodes algorithmiques pour simuler π, c'est-à-dire construire une variable aléatoire de loi π, ou proche de π.

L'idée principale est de construire une chaîne de Markov IRPA, de partir d'un état initial arbitraire, et de laisser évoluer la chaine un grand nombre d'itérations (et d'utiliser le théorème de convergence à l'équilibre).

5.1 Algorithme Hit-and-run

Exercice 33 (Simulation de la loi uniforme, Hit-and-Run Algorithm)**.** Soit A un sous-ensemble mesurable de $\mathbb{R}^d$ tel que $\lambda(A) > 0$, où λ est la mesure de

Lebesgue d-dimensionnelle. On rappelle qu'une variable uniforme sur A a la loi

$$\mu_A(dx) = \frac{\lambda(dx)}{\lambda(A)}.$$

Pour certains ensembles A, les méthodes accept-or-reject sont très peu efficaces, typiquement lorsque A est très "mince", ou que la dimension d est très grande. Les chaines de Markov peuvent fournir une alternative.

Pour simplifier et parce qu'on travaille dans un cadre discret, on suppose ici que A est un sous-ensemble fini de $\mathbb{Z}^2$. On suppose de plus que A est connexe, où un point est relié à un autre ssi ils sont reliés par une arête de $\mathbb{Z}^2$.

On considère la suite de variables aléatoires au comportement suivant :

— $X_0 \in A$.

— A chaque temps n, on choisit avec probabilité $1/2$ la ligne sur laquelle se situe X_n ou la colonne sur laquelle se situe X_n.

— On tire uniformément $X_{n+1} \in A$ sur cette ligne ou cette colonne.

1. Identifier la matrice de transition Q et les propriétés de la chaîne de Markov .
2. Montrer que la distribution uniforme sur A est invariante.
3. En déduire une manière de simuler approximativement une variable uniforme sur A. Quelle convergence a-t-on ?
4. Comment pourrait-on généraliser cette méthode dans le cadre continu (informel) ?

5.2 Algorithme de Metropolis

Etant donné une mesure de probabilité π sur un espace E, le but de l'algorithme de Metropolis est de construire une chaine de Markov $X = (X_n)$ telle que la loi de X_n converge vers π,

$$X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \pi.$$

On suppose sans perte de généralité que $\pi(x) > 0$ sur E (autrement il suffit d'ôter de E les points où π s'annule). Une manière pour approximer π de cette manière est de trouver une matrice stochastique $Q(x, y)$ telle que la chaine de Markov correspondante soit IRPA et π est invariante pour Q. L'algorithme de Metropolis consiste en les étapes suivantes :

— Construire matrice de transition $P(x, y)$ quelconque telle que la chaîne de Markov correspondante qui vit dans le bon espace d'états E soit irréductible apériodique. Il faut de plus que P soit symétrique : $P(x, y) = P(y, x)$. Pour le bon fonctionnement de l'algorithme de simulation, il faut que la chaine de Markov correspondante soit facile à simuler, c'est-à-dire que la loi $P(x, \cdot)$ doit être facile à calculer.

— Tirer X_1 suivant une loi quelconque μ (typiquement $\mu = \delta_x$ pour une certaine configuration $x \in E$)

— Pour chaque n, tirer Y_{n+1} suivant la loi $P(X_n, \cdot)$ (c'est-à-dire tirer Y_{n+1} comme si $(X_n, Y_{n+1}, \dots)$ était une chaîne de Markov de matrice de transition $P(x,y)$)
— Tirer U_n une variable de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendamment de (X_n) et (Y_n).
— Si $\pi(Y_{n+1})/\pi(X_n) \geqslant U_n$, poser $X_{n+1} = Y_{n+1}$
— Sinon, garder $X_{n+1} = X_n$.

En d'autre termes, on fait évoluer $X = (X_n)$ comme une chaîne de Markov normale de matrice de transition P, à la différence qu'à chaque itération on ne garde la nouvelle valeur X_{n+1} que si le nouveau ratio $\pi(X_{n+1})/\pi(X_n)$ est suffisamment élevé, autrement on laisse l'ancienne valeur $X_{n+1} = X_n$.

Exercice 34. Pourquoi (X_n) est une chaîne de Markov (homogène) ? Quelle est sa matrice de transition ? Montrer qu'elle est irréductible et réversible. Qu'en déduisez-vous sur la limite de X_n ? Par quel type plus général de condition peut-on remplacer

$$U_n \leq \frac{\pi(Y_{n+1})}{\pi(X_n)}?$$

Barker a proposé la condition

$$U_n \leq \frac{\pi(Y_{n+1})}{\pi(X_n) + \pi(Y_{n+1})}$$

Exercice 35. Proposer une chaine de Markov pour approximer une variable de Poisson de paramètre $\theta > 0$. Quelle est la matrice de transition correspondante si l'on utilise la règle de Barker ?

Exercice 36 (Simulation d'un processus de répulsion)**.** On lance n particules chargées positivement dans $[0,1]^2$, que l'on approxime par

$$X = \{(k/N, j/N); 0 \leq k, j \leq N\} = \left(\frac{1}{N}\mathbb{Z}\right)^2 \cap [0,1]^2.$$

Une étude des propriétés électromagnétiques du système permet de montrer que la probabilité d'une configuration $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$ est proportionnelle à

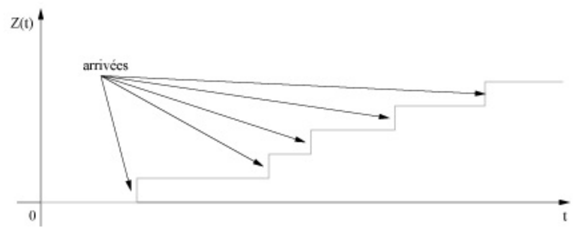
$$\prod_{1 \leq i < j \leq n} \|x_i - x_j\|.$$

Proposer une procédure informatique pour simuler informatiquement approximativement ce processus, en se basant sur l'algorithme de Metropolis.

6 Chaînes de Markov en temps continu, processus de Poisson

6.1 Lois sans mémoire

On s'intéresse a la file d'attente qui se forme a l'entrée d'un bureau de Poste. Comme vu précédemment, le nombre de personnes présents dans la file après n évènements (évènement=une personne part ou une personne arrive) est une chaîne de Markov homogène. Les clients arrivent cependant a des temps aléatoires, on peut donc se demander : Au temps t, quel est le nombre $Z(t)$ de clients ayant franchi la porte d'entrée, où t est un nombre réel positif ?



Pour cela il faut modéliser le temps aléatoire entre deux évènements. A priori, on peut choisir ce qu'on veut, mais la réalité nous impose un certain modèle.

Faisons les hypothèses suivantes :

- Les temps qui s'écoulent entre les évènements sont des variables aléatoires IID.
- Le temps T qui s'écoule entre deux évènement satisfait au principe suivant : Si après une durée $t \geqslant 0$, il ne s'est toujours rien passé, la probabilité qu'il se passe quelque chose dans la prochaine minute (ou n'importe quelle durée) est la même probabilité qu'il ne se passe rien dans la première minute d'attente.

Comment modéliser la seconde propriété ?

Pour $t, s \geqslant 0$,

$$\mathbb{P}(T \in [t, t+s])|T \geqslant t) = \mathbb{P}(T \in [0, s]).$$

Cette propriété caractérise ce qu'on appelle les lois **sans mémoire**, et il y a peu de solutions.

Exercice 37. Les seules variables aléatoires sans mémoire sont les variables exponentielles, c'est-a-dire avec fonction de distribution

$$\mathbb{P}(T \geqslant t) = \exp(-\lambda t), t \geqslant 0,$$

où $\lambda > 0$ est le paramètre de la loi.

Toute la liberté de choix que l'on a est donc de choisir le paramètre $\lambda > 0$, qu'on appelle intensité de la file d'attente, et qui représente la fréquence moyenne d'arrivée des clients.

6.2 Processus de Poisson

Le processus décrit précédemment est appelé le processus de Poisson. Formellement, on le définit ainsi :

— Soit $\lambda > 0$.

— Soit $T_i, i \geqslant 1$, une famille de variables aléatoires IID exponentielles de paramètre λ.

— Soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} T_k, n \geqslant 0$ (avec $S_0 = 0$),

— Pour $t \geqslant 0$, on pose

$$X(t) = \max\{n : S_n \leqslant t\} = \min\{n : S_{n+1} > t\} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{S_k \leqslant t\}}.$$

Ce processus possède la propriété de Markov continue :

$$\forall n \geqslant 1, 0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_n, x_1 \in \mathbb{N}, \ldots, x_n \in \mathbb{N},$$
$$\mathbb{P}(X_{t_n} = m_n | X_{t_1} = x_1, \ldots, X_{t_{n-1}} = x_{n-1}) = \mathbb{P}(X_{t_n} = m_n | X_{t_{n-1}} = x_{n-1})$$

Au lieu de matrice de transition, on parle pour le processus X_t de noyau de transition $Q_t(x, y), t > 0, x, y \in \mathbb{N}$,

$$Q_t(x, y) = \mathbb{P}(X_t = y | X_0 = x).$$

Proposition 17. *Pour $t > 0$, soit N_t une variable de Poisson de paramètre λt. Pour le processus de Poisson,*

$$Q_t(x, y) = \mathbb{P}(N_t = y - x),\ t > 0, x \leqslant y \in \mathbb{N}.$$

Exercice 38. :Preuve ! On remarque que $\mathbb{P}(X_t = k) = \mathbb{P}(T_1 + \cdots + T_k \leqslant t,\ T_1 + \cdots + T_{k+1} > t)$

1. Ecrire la densité $f_{k+1}(t_1, \ldots, t_{k+1})$ de $(T_1, \ldots, T_{k+1})$
2. Calculer

$$\mathbb{E}\left[\mathbf{1}_{\{T_1 + \cdots + T_k \leqslant t\}} \mathbb{P}(T_{k+1} > t - (T_1 + \cdots + T_k) | T_1, \ldots, T_k)\right]$$

et en déduire le résultat.

1

Proposition 18. *On déduit de l'exercice précédent le résultat suivant : Le processus de Poisson est à* accroissements stationnaires, *c'est-à-dire*

$$\forall t_1, t_2, s > 0,\ X_{t_1+s} - X_{t_1} \overset{(d)}{=} X_{t_2+s} - X_{t_2}.$$

6.3 Générateur infinitésimal

Plutôt que la matrice de transition, avec un processus de Markov X_t en temps continu, on préfère travailler avec le *générateur infinitésimal* du processus, défini de la manière suivante : Soit f une fonction bornée et dérivable. On pose

$$Lf(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\mathbb{E}\left[f(X_{t+\varepsilon}) - f(X_t)\right]}{\varepsilon}$$

en supposant que la limite existe. Remarquons que si le processus est homogène, la limite ne dépend pas de t.

Si de plus le processus est à accroissements stationnaires, comme c'est le cas pour le processus de Poisson, cet opérateur ne dépend pas de t : En effet, $X_{t+\varepsilon} - X_\varepsilon \overset{(d)}{=} X_\varepsilon - X_0$ pour tous $t, \varepsilon > 0$.

Dans ce cas, l'opérateur L transforme une fonction en une autre fonction, qui dénote la manière dont $f(X_t)$ varie au voisinage de 0 si $X_0 = x$.

Dans le cas Poissonien, $X_\varepsilon - X_0$ est une variable de Poisson de paramètre $\lambda\varepsilon$. Pour ε petit, on a

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X_\varepsilon = 0) = \exp(-\varepsilon\lambda),\\
&\mathbb{P}(X_\varepsilon = 1) = \exp(-\varepsilon\lambda)\frac{\lambda\varepsilon}{1!}\\
&\mathbb{P}(X_\varepsilon \geqslant 2) = \sum_{k=2}^{\infty}(\lambda\varepsilon)^k \frac{e^{-\lambda\varepsilon}}{k!} \leqslant \sum_{k=0}^{\infty}(\lambda\varepsilon)^{k+2}\frac{1}{(k+2)!} \leqslant \varepsilon^2 \underbrace{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k+2)!}}_{<\infty}.
\end{aligned}$$

Donc

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[f(X_\varepsilon) - f(X_0)|X_0 = x] &= (f(x+0) - f(x)) * \exp(-\lambda\varepsilon) + (f(x+1) - f(x))\lambda\varepsilon\exp(-\lambda\varepsilon) + 2\|f\|_\infty o(\varepsilon)\\
Lf(x) &= \lambda(f(x+1) - f(x))
\end{aligned}$$

- On dit que X_t est un *processus de sauts*, car il ne peut varier que par discontinuités.
- Dans ce cas, X_t est un processus de saut à taux constant λ : λ est l'intensité avec laquelle le processus *saute*, sous-entendu la répartition des sauts est Poissonnienne, c'est-à-dire que les sauts sont séparés par des variables exponentielles IID.

6.4 Processus de Poisson composé

Modifions le modèle précédent de la manière suivante. Chaque personne qui arrive à la poste va soit retirer, soit déposer de l'argent. Comme les comportements des clients sont à priori indépendants entre eux, et que de l'extérieur, sans plus d'hypothèse, tous les clients sont "identiques" (i.e. ils ont tous la même probabilité d'emprunter/de retirer une certaine somme d'argent), on modélise l'argent total apporté à la banque de la manière suivante.

On introduit une loi de probabilité μ sur $\mathbb{R}$, qui représente la variable aléatoire de la quantité d'argent déposée par un client.

Par exemple, si un client a une probabilité $1/2$ de retirer de l'argent, cela nous donne $\mu(]-\infty,0[) = \frac{1}{2}$, et $\mu(]0,\infty[) = \frac{1}{2}$. On suppose qu'il n'y a pas de client qui vient pour ne rien faire (ou plutôt, on ne les comptabilise pas).

Pour modéliser la quantité d'argent déposée à un instant $t \geqslant 0$, on introduit une suite de variables iid $Y_k, k \geqslant 1$, indépendants de μ_t, avec comme loi commune μ, et on suppose que le i-ème client a apporté une quantité d'argent $Y_k \in \mathbb{R}$.

En appelant X_t le processus de Poisson défini au chapitre précédent (avec paramètre d'intensité $\lambda > 0$), la quantité d'argent déposée à l'instant t est donc

$$Z_t = \sum_{k=1}^{\infty} Y_k \mathbf{1}_{\{X_t \geqslant k\}},$$

en gros, on comptabilise les sommes de tous les clients qui sont effectivement déjà passés à l'instant t.

En utilisant le fait que X_t est une variable de Poisson de paramètre λt, et que les Y_i sont IID de loi μ, on peut déterminer la loi de Z_t, via la fonction caractéristique.

Rappel sur les fonctions caractéristiques Pour toute variable aléatoire $Y \in \mathbb{R}$, on introduit sa fonction caractéristique (ou transformée de Fourier)

$$\psi_Y(\theta) = \mathbb{E}[\exp(i\theta Y)] = \int_{\mathbb{R}} e^{i\theta y}\mu(dy),$$

où μ est la loi de Y. Cette fonction possède de nombreuses propriétés, comme par exemple

— $\psi_Y(0) = 1$

— $|\psi_Y(\theta)| \leqslant 1$

— ψ_Y caractérise la loi de Y, dans le sens où $\psi_Y = \psi_{Y'}$ implique $Y \overset{(d)}{=} Y'$.

Donc, déterminer la loi de Y revient à déterminer sa fonction caractéristique. De plus, si $\mathbb{E}[|Y|] < \infty$, on peut calculer l'espérance de Y avec sa fonction caractéristique

$$\mathbb{E}[Y] = -i\psi_Y'(0) = -i\frac{d}{d\theta}|_{\theta=0}\psi_Y(\theta).$$

Si $\mathbb{E}[Y^2] < \infty$, on peut calculer son moment d'ordre 2,

$$\mathbb{E}[Y^2] = -\psi_Y''(0) = -\frac{d^2}{d\theta^2}|_{\theta=0}\psi_Y(\theta).$$

Théorème 13. *Avec les notations précédentes, pour $t > 0$, la fonction caractéristique de Z_t est*

$$\psi_{Z_t}(\theta) = \exp\left(\lambda t\left(\psi_{Y_1}(\theta) - 1\right)\right), \theta \in \mathbb{R}.$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[\exp(i\theta Z_t)] &= \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_t = n)\mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{X_t \leqslant k\}} Y_k\right) | X_t = n\right] \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{E}\left[\exp\left(i\theta \sum_{k=1}^{n} Y_k\right)\right] \\
&= e^{-\lambda t} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} \mathbb{E}[\exp(i\theta Y_1)]^n \text{ grâce à l'indépendance entre les } Y_k \\
&= e^{-\lambda t} \exp(\lambda t \mathbb{E}[\exp(i\theta Y_1)])
\end{aligned}$$

$\square$

Cela nous permet par exemple de déterminer les premiers moments de Z_t :

$$\mathbb{E}Z_t = -i\frac{d}{d_\theta}|_{\theta=0}\psi_{Z_t}(\theta) = -i\lambda t \psi'_{Y_1}(0) \exp\left(\lambda t(\underbrace{\psi_{Y_1}(0)}_{=1} - 1)\right) = \lambda t \mathbb{E}[Y_1]$$

$$\mathbb{E}Z_t^2 = -\frac{d^2}{dt^2}|_{t=0}\psi_{Z_t}(\theta) = -\exp(\dots)\left[\lambda t \psi''_{Y_1}(0) + (\lambda t \psi'_{Y_1}(0))^2\right] = (\lambda t \mathbb{E}Y_1^2 + \lambda^2 t^2 (\mathbb{E}Y_1)^2)$$

Du coup, la variance est

$$\mathrm{Var}(Z_t) = \mathbb{E}[Z_t^2] - (\mathbb{E}Z_t)^2 = \lambda t \mathbb{E}Y_1^2.$$

Exercice 39. Quel est le générateur infinitésimal du processus Z_t ?

Le GI de Z_t est

$$Lf(x) = \lambda \mathbb{E}[f(x + Y_1) - f(x)].$$

Exercice 40. Supposons que la quantité d'argent déposée par chaque client soit le produit de 10 par une variable de Poisson de paramètre 2. Déterminer la fonction caractéristique, l'espérance, et la variance, de Z_t pour $t > 0$.

7 Modèles de Markov cachés

On considère le modèles biologique suivant. Un brin d'ADN est une séquence de lettres parmi $\{A, C, G, T\}$. Parmi la succession de séquences d'ADN, certaines sont codantes, et d'autres sont non-codantes. Un des enjeux des généticiens est de distinguer ces deux types de séquences, afin de mieux comprendre l'interdépendance entre les différentes séquences génétiques (codantes) du génome. L'hypothèse de base pour y parvenir est que la fréquence d'apparitions des différentes nucléotides diffère selon que l'on se trouve sur un brin codant ou non-codant.

On propose dans ce chapitre le modèle simplifié suivant : Chaque nucléotide est représentée par un couple (s, y), où $s \in \mathcal{I} = \{1 \text{ (codant) }, -1 \text{ (non-codant)}\}$, et $y \in \mathcal{A} = \{A, C, G, T\}$. La séquence de nucléotides est une suite de variables aléatoires $X_k = (S_k, Y_k)_{k \geq 1}$. On suppose qu'à chaque transition $k \to k+1$ la probabilité de passer d'une séquence codante à une séquence non-codante est $\varepsilon > 0$ et la probabilité de passer d'une séquence non-codante à une séquence codante est $\varepsilon' > 0$. La loi de Y_k ne dépend que de la valeur de S_k. On appelle μ_+ la loi de Y_k si $S_k = 1$, et μ_- la loi de Y_k si $S_- = \{-\}$.

On observe uniquement les variables Y_k. Le problème biologique est le suivant :

— Identifier les parties codantes.

— Estimer les paramètres $\varepsilon, \varepsilon', \mu_+, \mu_-$.

Schéma :

Exercice 41.
1. Ecrire la matrice de transition de S_k. La suite $(Y_k)_k$ est-elle une chaîne de Markov ? La suite $(S_k, Y_k)_k$ est-elle une chaîne de Markov ? Ecrire la matrice de transition correspondante.
2. En vue d'estimer le paramètre $\theta = (\varepsilon, \varepsilon', \mu_-, \mu_+)$, définir l'espace des paramètres Θ.

7.1 Estimation par maximum de vraisemblance

On rappelle le principe de l'estimateur de maximum de vraisemblance dans un problème statistique, via un exemple. Un joueur possède une pièce de monnaie biaisée dont la probabilité de faire pile est $\theta_0 \in [0, 1]$. Après 10 lancers, il a obtenu 4 pile. Intuitivement, la meilleure estimation de θ_0 que l'on puisse avoir à ce stade est $\hat{\theta}_{10} = 4/10$. De manière générale, en comptant $X_n = 1$ pour pile au n-ème lancer et $X_n = 0$ autrement, on a

$$\hat{\theta}_N := \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} X_k \to \theta \text{ p.s.}$$

d'après la loi des grands nombres, où N est le nombre de lancers observés. On a de plus

$$\frac{1}{\sqrt{N}} (\hat{\theta}_N - \theta) \to \mathcal{N}$$

où $\mathcal{N}$ est une variable gaussienne (théorème central limite). L'estimateur $\hat{\theta}_N$ est en fait ce qu'on appelle un estimateur par maximum de vraisemblance. En appelant $\Theta = \{\theta \text{ possibles}\} = [0, 1]$, $\hat{\theta}_N$ est la valeur qui maximise la vraisemblance, définie par

$$\mu_N(X, \theta) = \mathbb{P}(\text{ observer la séquence } X \text{ sachant que } \theta_0 = \theta).$$

Autrement dit,

$$\mu_N(X, \hat{\theta}_N) \geq \mu_N(X, \theta)$$

pour tout $\theta \in \Theta$. Dans notre cas,

$$\mu_N(X,\theta) = \prod_{k=1}^{N} \begin{cases} \theta \text{ si } X_k = 1 \\ 1-\theta \text{ si } X_k = 0 \end{cases} \qquad = \theta^{\sum X_k}(1-\theta)^{N-\sum X_k}$$

Il est utile en pratique d'observer que, comme la fonction log est monotone, trouver le maximum de la fonction $\theta \mapsto p(x,\theta)$ est pareil à trouver le maximum de la fonction $\theta \mapsto L(x,\theta) := \log(p(x,\theta))$. Dans notre cas,

$$L(X,\theta) = \sum X_k \log(\theta) + (N - \sum_k X_k)\log(1-\theta).$$

Si l'on dérive par rapport à θ, on a

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{\sum X_k}{\theta} - \frac{\sum X_k}{1-\theta},$$

et le maximum s'annule pour

$$\frac{\theta}{1-\theta} = \frac{\sum X_k}{N - \sum_{X_k}} = \frac{m}{1-m}$$

où $m = \frac{1}{N}\sum X_k$, on en déduit que la dérivée s'annule pour $\theta = m$. Une rapide étude nous montre que le maximum est en effet atteint en m, ce qui nous indique que dans ce cas l'EMV est bien l'estimateur

$$\hat{\theta}_N^{EMV} := m = \frac{1}{N}\sum X_k = \hat{\theta}_N$$

proposé naturellement.

Exercice 42. Soit $X_1, \ldots, X_N$ N variables iid de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

1. Ecrire $L(X,\lambda)$ la log-vraisemblance.
2. Dériver par rapport à λ.
3. Déterminer $\hat{\lambda}_N^{EMV}$. Que remarquez-vous ?

7.2 Algorithme EM

Nous allons tenter d'applique l'EMV pour estimer les paramètres du MMC. On appelle μ_0 la loi de S_0. Commençons par calculer la vraisemblance. Soit $\theta \in \Theta$, et soit une observation

$$x = ((s_1,y_1),\ldots,(s_N,y_N))$$

où $s_i \in \mathcal{I} = \{1,-1\}, y_i \in \mathcal{A} = \{A,B,C,D\}$. On a

$$p_N(x,\theta) = \mu_0(s_0)Q(s_0,s_1)\ldots Q(s_{N-1},s_N)p_{s_0}(y_0)\ldots p_{s_N}(y_N).$$

Le problème est qu'on le ne dispose pas de toute l'observation x, mais uniquement de l'observation $y = (y_1, \dots, y_N)$. Il faut donc calculer la vraisemblance du modèle caché, en conditionnant par toutes les valeurs possibles de $s = (s_1, \dots, s_N) \in \mathcal{I}^N$:

$$p_N^c(y, \theta) = \sum_{s \in \mathcal{I}^N} p_N((s, y), \theta).$$

La log-vraisemblance de p_N est très facile à calculer,

$$\log p_N = \log(\mu_0(s_0)) + \sum_k \log(Q(s_k, s_{k+1})).$$

Calculons la log-vraisemblance :

$$\log(p_N^c) = \log(\sum_{s \in \mathcal{I}^N} p_N((s, y), \theta))$$

Pour la maximiser, le point de départ est un lemme d'entropie :

Lemme 2. *Soit $\mu(x) > 0$ une probabilité sur un espace discret E. Soit l'entropie de μ définie par*

$$H(\mu) = \sum_x \mu(x) \log(\mu(x)).$$

Etant donné une autre probabilité $\mu'(x)$, on définit

$$H_\mu(\mu') = \sum_x \mu(x) \log(\mu'(x)).$$

Alors $H_\mu(\mu') \leq H(\mu) = H_\mu(\mu)$. Il y a de plus égalité ssi $\mu = \mu'$.

Démonstration. Si $\mu'(x_0) = 0$ pour un certain $x_0 \in E$, alors $\log(\mu'(x_0)) = -\infty$, et donc l'inégalité est triviale. Autrement on a

$$\begin{aligned} H_\mu(\mu') - H_\mu(\mu) &= \sum_{x \in E} \mu(x) \left(\log(\mu'(x)) - \log(\mu(x))\right) = \sum_{x \in E} \mu(x) \log\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\right) \\ &\leq \sum_{x \in E} \mu(x) \left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - 1\right) \text{ par l'inégalité } \log(u) \leq 1 - u, u > 0 \\ &\leq \sum_{x \in E} \mu'(x) - \sum_{x \in E} \mu(x) = 1 - 1 = 0, \end{aligned}$$

d'où l'inégalité demandée. Il n'y égalité que si il y a $\log\left(\frac{\mu'(x)}{\mu(x)}\right) = \frac{\mu'(x)}{\mu(x)} - 1$ pour tout x, ce qui implique $\mu'(x) = \mu(x)$ pour tout $x \in E$. $\square$

On note $\mathbb{P}_\theta$ la probabilité du modèle sous l'hypothèse que la vraie valeur du paramètre est $\theta \in \Theta$: On applique ce lemme d'entropie aux distributions

$$p_{y,\theta}(s) = \mathbb{P}_\theta(S = s|Y = y) = \frac{\mathbb{P}_\theta(S = s, Y = y,)}{\mathbb{P}_\theta(Y = y)} = \frac{p_N(s, \theta, y)}{p_N^c(\theta, y)}$$

et $p_{y,\theta_0}(s)$ et on a

$$\begin{aligned} H_{p_{y,\theta_0}}(p_{y,\theta}) &\leq H(p_{y,\theta_0}) \\ \sum_s p_{y,\theta}(s)\log(p_{y,\theta_0}(s)) &\leq \sum_s p_{y,\theta_0}(s)\log(p_{y,\theta_0}(s)) \end{aligned}$$

7.2.1 Condition de Doeblin

Soit $X = (X_n)$ une chaîne de Markov de matrice de transition Q.

Définition 10. *On dit que X vérifie la condition de Doeblin ssi il existe $l \in \mathbb{N}^*, \alpha > 0$ et μ une probabilité sur E telle que*

$$Q^l(x, y) \geq \alpha\mu(y).$$

L'intérêt de cette condition est qu'elle est plus simple à vérifier que la récurrence positive.

Théorème 14. *Supposons que X vérifie la condition de Doeblin. Alors X est IRPA.*

Avant de montrer le théorème, voyons un exemple.

Exercice 43. Retour sur l'exercice 33.

1. On cherche à déterminer $l^* \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ le plus petit $l \in \mathbb{N}^*$ tel que

$$Q^l(x, y) > 0$$

pour tous $x, y \in A$. Trouver des exemples pour lesquels $l^* = 3, 5, 10$. Montrer que $l^* < \infty$ pour n'importe quel A comme décrit dans l'exercice 33.

2. Montrer que la chaine vérifie la condition de Doeblin.

Exercice 44. Montrer le théorème précédent dans le cas où E est fini.

8 Sujet d'examen

8.1 Juin 2011

Exercice 45. On considère une chaîne de Markov (X_n) dans $E = \{1, 2, 3\}$ avec matrice de transition

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 1/2 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Quelles sont les classes de récurrence/transience ?

2. Calculer une mesure de probabilité invariante. Est-elle unique ? Est-elle réversible ?

3. Calculer pour tout $x \in E$ le temps moyen de retour à x, $\mathbb{E}(T_x^{(1)})$. Calculer la période de tout $x \in E$. Quelle est la limite des probabilités

$$Q^n(x, y) = \mathbb{P}_x(X_n = y)$$

quand $n \to \infty$.

4. Calculer le temps moyen de trajet entre 1 et 3

$$\mathbb{E}_1(T_3).$$

5. Répéter les questions 1-3 avec la matrice de transition

$$Q' = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 46 (Théorie du renouvellement)**.** Un homme possède un stock de bois aléatoire. Il a au jour 0 un nombre X_0 de bûches, et chaque jour il consomme une bûche. On appelle X_n le nombre de bûches à la fin du n-ème jour. Si à un jour n il utilise sa dernière bûche, il renouvelle son stock le lendemain en allant ramasser des bûches, il en ramène un nombre aléatoire $X_n \geq 1$ tel que, pour $y \geq 1$,

$$\mathbb{P}(X_n = y) = f(y),$$

ou

$$f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}^+$$

satisfait $\sum_{y \geq 1} f(y) = 1$. Le jour du ramassage, il consomme également immédiatement une bûche.

(Ce modèle s'appelle modèle de renouvellement, et peut s'appliquer à tout stock qui se renouvelle par un nombre aléatoire dont la loi ne varie pas.)

1. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov avec pour matrice de transition

$$Q(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ si } y = x - 1 \geq 0, \\ f(y+1) \text{ si } x = 0, \\ 0 \text{ autrement.} \end{cases}$$

2. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov irréductible.

3. Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov récurrente.

4. On appelle

$$Z = \{y \in \mathbb{N} : f(y) \neq 0\}.$$

Donner une condition simple sur Z pour que la chaîne soit apériodique.

5. On définit la mesure sur $\mathbb{N}$

$$\lambda(x) = \sum_{y=x+1}^{\infty} f(y), x \in \mathbb{N}.$$

Montrer que λ est invariante.

6. On suppose que la condition de la question 4. est vérifiée. On pose

$$m = \sum_{n \geq 0} n f(n).$$

Montrer que si $m < \infty$, on peut définir à partir de λ une distribution invariante π. Existe-t-il dans ce cas d'autres distributions invariantes ?

7. On pose

$$u(n) = \mathbb{P}_0(X_n = 0).$$

Donner la limite de $u(n)$ quand $n \to \infty$. Que dire sur la limite de $u(n)$ lorsque $\mu = \infty$?

8. On considère désormais le problème de renouvellement de machines : Une machine est affectée à une fonction particulière, et elle est remplacée par une machine identique neuve lorsqu'elle casse. La durée de vie d'une machine suit la loi Y, d'espérance $\mu < \infty$. On s'intéresse à la probabilité $v(n)$ qu'une machine se cassé précisément à l'instant n. On note $f(n) = \mathbb{P}(Y = n)$.

a) On appelle Y_n l'âge de la machine en marche à l'instant $n \geq 0$. Montrer que Y_n est une chaîne de Markov et donner sa matrice de transition.

b) En définissant judicieusement $f(n)$, montrer que Y_n peut s'écrire de manière explicite en fonction de (X_n) définie au début de l'exercice.

c) En déduire la valeur de $\lim_n v(n)$.

Exercice 47 (Question de cours)**.** Rappeler ce qu'est une mesure réversible et montrer que toute mesure réversible est invariante.