UFR de mathématiques et informatique

Intégration et Analyse de Fourier, Licence 3ème année 2012-2013

Partiel, lundi 12 novembre 2012 (durée 1h30)

Tous les documents et tous les appareils électroniques sont interdits. La qualité de la présentation et de la rédaction constitue une part importante dans l'appréciation de la copie. En particulier, les résultats obtenus devront être encadrés.

Exercice 1. (Cours) Enoncer CLAIREMENT le théorème de convergence monotone et le théorème de Beppo-Levi.

Exercice 2. Déterminer l'existence et calculer les quantités suivantes :

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \exp(\arctan(nx)) \frac{1}{x} dx.$$

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{x^2}{x + \frac{x^3}{n}} e^{-x^2} dx.$$

$$\int_0^1 \sum_{n\geq 0} x^{2n}(1-x)dx \text{ et en déduire que } \ln(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{n}.$$

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré. Soit $f : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction mesurable positive.

1. Montrer que
$$\nu : A \mapsto \int_A f d\mu$$
est une mesure sur $(E, \mathcal{A})$. On dit que ν est la mesure de densité f par rapport à μ.
2. On dit qu'une mesure ν est *absolument continue* par rapport à μ si pour tout $A \in \mathcal{A}$ tel que $\mu(A) = 0$, on a aussi $\nu(A) = 0$, et on le note $\nu << \mu$. Montrer que si ν a une densité par rapport à μ, alors $\nu << \mu$.

3. On rappelle que la mesure image de μ par une fonction mesurable $g : (E, \mathcal{A}) \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est

$$\mu g^{-1}(A) = \mu(g^{-1}(A)), A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$

Donner la mesure image $\nu = \mu g^{-1}$ lorsque $(E, \mathcal{A}, \mu) = (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}), \lambda)$ et $g(x) = x^3, x \in \mathbb{R}$. Cette mesure a-t-elle une densité par rapport à λ ? Si oui l'expliciter ; si non, justifier.

4. Donner un exemple de mesure sur $(E, \mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ qui n'est pas absolument continue par rapport à λ. Cette mesure admet-elle une densité ?

Exercice 4. Soit $(E, \mathcal{A})$ un espace mesuré. Soit $(A_n)_{n\geq 1}$ une famille d'ensembles mesurables. On pose $f_n(x) = 1_{A_n}(x), x \in E$.

1. Montrer que pour tout $x \in E$,

$$f(x) := \liminf_n f_n(x) = 0 \text{ ou } 1,$$

et montrer que f est mesurable.

2. Déterminer $f = \liminf_n f_n$ dans le cas où $E = [0, 1]$ et

$$A_n = \begin{cases} [0, 1/2] \text{ si } n \text{ est pair} \\ [1/2, 1] \text{ si } n \text{ est impair.} \end{cases}$$

3. Montrer dans le cas général que

$$A := \{x : \liminf_n f_n(x) = 1\} \text{ est mesurable}$$

On note $A = \liminf_n A_n$. Proposer une définition similaire pour l'ensemble $\limsup_n A_n$. Que vaudrait $\limsup_n A_n$ dans le cas de la question 2.

4. *(Bonus) Soit $(x_n)_{n>1}$ une suite dense dans $[0, 1]$, ε tel que $1/2 > \varepsilon > 0$, et $A_n = [x_n - \varepsilon, x_n + \varepsilon] \cap [0, 1]$. Montrer que $\limsup_n A_n = [0, 1]$ et $\liminf_n A_n = \emptyset$.