1er cours

Exercice 1. Soit $A, B \subseteq E$, montrer que pour tout $x \in E$,

$$1_{A\cup B} = \mathbf{1}_A + \mathbf{1}_B - \mathbf{1}_{A\cap B}$$
$$\text{Soit } A_1 \subseteq A_2 \subseteq ...$$
$$\lim_k \mathbf{1}_{A_k(x)} = 1_{\{x \text{ est dans tous les } A_k\}}$$

Réponse : $1_{A\cup B}$: voir TD1.

$\lim_k 1_{A_k}(x) = 1$ ssi à partir d'un certain rang $k \geq 1$, x est dans A_k, car par inclusion il sera ensuite dans tous les $A_n, n \geq k$. Donc

$$\lim_k 1_{A_k} = 1_{\cup_k A_k}.$$

Exercice 2. On a pour toute famille dénombrable d'ensembles $\{A_i; i \in I\}$

$$\bigcap_{i\in I} A_i = (\bigcup_{i\in I} A_i^c)^c$$

Montrer alors que (i)+(ii)+(iii)$\Leftrightarrow$ $(i) + (ii) + (iii')$.

Réponse :

$$x \in \bigcap_i A_i \Leftrightarrow \forall i, x \in A_i,$$
$$\Leftrightarrow \text{non}(\exists i, x \notin A_i)$$
$$\Leftrightarrow \text{non}(x \in U_i A_i^c)$$
$$\Leftrightarrow x \in (\cup A_i^c)^c$$

Dés lors, si $\mathcal{A} \subset \mathcal{P}(E)$ vérifie (i)+(ii)+(iii'), pour $A_n, n \geq 1$ dans $\mathcal{A}$, on a par (ii) et (iii') que $\bigcap_n A_n^c \in \mathcal{A}$, et donc encore par (ii) que

$$(\bigcap_n A_n^c)^c \in \mathcal{A},$$

càd (iii) : $\cup_n A_n \in \mathcal{A}$. On a donc prouvé (i)+(ii)+(iii') implique (i)+(ii)+(iii). La réciproque est similaire.

Exercice 3.

Proposition 1 (Restriction)**.** *Soit $(E, \mathcal{A})$ un ensemble mesurable et soit $E' \subseteq E$ un sous-ensemble de E (non-nécessairement mesurable). Alors*

$$\mathcal{A} \cap E' = \{A \cap E' : B \in \mathcal{A}\}$$

est une tribu sur E', appelée tribu trace. On note parfois simplement $(E', \mathcal{A} \cap E') = (E', \mathcal{A})$.

Preuve : On note $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cap E'$.

- (i) $\emptyset = \emptyset \cap E' \in \mathcal{A}'$
- (ii) Soit $A \in \mathcal{A} \cap E'$, alors il existe $B \in \mathcal{A}$ tel que $A = B \cap E'$, et donc le complémentaire de A dans E' est

$$B^c \cap E' \in \mathcal{A}'$$

donc le complémentaire de A dans E' est dans $\mathcal{A}'$

– (iii) Soit $A_n, n \geq 1 \in \mathcal{A}'$ et $B_n; n \geq 1$ tq $A_n = B_n \cap E'$. Alors

$$\cup_n A_n = \cup_n (B_n \cap E') = (\cup_n B_n) \cap E' \in \mathcal{A}'$$

car $\cup_n B_n \in \mathcal{A}$ par (iii)

2ème cours

Exercice 4. Si $f = \mathbf{1}_A : E \mapsto (\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}))$, on a

$$\sigma(f) = \sigma(\{A\}) = \{\emptyset, A, A^c, E\}.$$

Démonstration. Pour tout borélien $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$,

$f^{-1}(B) \in \{\emptyset \text{ (si } 0 \notin B, 1 \notin B) \quad , A \text{ (si } 0 \notin B, 1 \in B) \text{ }, A^c \text{ si } 0 \in B, 1 \notin B) \text{ , E (si } 0 \in B, 1 \in B) \text{ }\}.$

□

Exemple 2. $E = [1, +\infty[, F =]0, 1]$

$$\mathcal{C} = \{]0, 1/3],]1/3, 2/3],]2/3, 1]\} \subset \mathcal{P}(F).$$

Determiner $\sigma(\mathcal{C})$.

$f(x) = 1/x$. Déterminer $\sigma(f)$ relativement à $\sigma(\mathcal{C})$.

Montrer que

$$\sigma(f) = \sigma(f^{-1}(]0, 1/3]), f^{-1}(]1/3, 2/3]), f^{-1}(,]2/3, 1]))$$

càd que

$$f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \sigma(f^{-1}(\mathcal{C}))$$

Démonstration.

$$\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{C} \cup \{\emptyset, F,]0, 2/3],]1/3, 1],]0, 1/3] \cup]2/3, 1]\}.$$

$\sigma(f) = f^{-1}(\sigma(\mathcal{C})) = \{f^{-1}(\emptyset), f^{-1}(F), f^{-1}([0, 1/3[), f^{-1}([1/3, 2/3[), etc...\} = \{\emptyset, E,]3, +\infty[,]3/2, 3], etc...\}$

Il suffit de remarquer pour conclure que

$$\{\emptyset, E,]3, +\infty[,]3/2, 3], etc...\} = \sigma(f^{-1}(]0, 1/3]), f^{-1}(]1/3, 2/3]), f^{-1}(,]2/3, 1]))$$

□

Exercice 5. Donner d'autres caractérisations similaires de la mesurabilité des fonctions réélles.

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}) = \sigma([a, b[; a < b) = \sigma(]a, b], a < b) = \sigma(] - \infty, a], a \in \mathbb{R}) = \sigma(] - \infty, a[, a \in \mathbb{R})$$

Exercice 6. Toujours vrai si on remplace $a, b \in \mathbb{R}$ par $a, b \in \mathbb{Q}$. (Pour $a < b$, il existe $(a_k)_{k \geq 1}$ tq $a_k \uparrow a$ etc...)

Démonstration. Soit $[a, b] \in \mathbb{R}$, et $(a_k)_{k \geq 1}$ une suite de rationnels $\leq a$ qui converge vers a, et $(b_k)_{k \geq 1}$ une suite de rationnels $\geq b$ convergant vers b. Alors

$$[a, b] = \bigcap_{k \geq 1} [a_k, b_k]$$

ce qui prouve que

$$[a, b] \subset \sigma([a', b'], a' < b' \in \mathbb{Q}).$$

□

3ème cours

Exercice 7. Si on n'imposait pas l'axiome (ii), l'unique autre mesure possible serait

$$\mu : A \mapsto +\infty.$$

Démonstration. Soit μ une application qui vérifie i et pas ii. Soit $a = \mu(\emptyset) \neq 0$. Alors

$$a = \mu(\emptyset) = \mu(\emptyset \cup \emptyset) = 2\mu(\emptyset) = 2a, \text{ donc } a = +\infty.$$

Il s'en suit que pour tout mesurable A, $\emptyset \subset A$ donc $\mu(A) \geq \mu(\emptyset) \geq +\infty$. □

Exercice 8. Donner une expression de $\mu(A \cup B \cup C)$ (on pourra s'insipirer des résultats sur les indicatrices).

Démonstration.

$$\begin{aligned}
\mu(A \cup B \cup C) &= \mu(A \cup (B \cup C)) = \mu(A) + \mu(B \cup C) - \mu(A \cap (B \cup C)) \\
&= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cap C) - \mu((A \cap B) \cup (A \cap C)) \\
&= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(B \cap C) - (\mu(A \cap B) + \mu(A \cap C) - \mu((A \cap B) \cap (B \cap C))) \\
&= \mu(A) + \mu(B) + \mu(C) - \mu(A \cap B) - \mu(A \cap C) - \mu(B \cap C) + \mu(A \cap B \cap C).
\end{aligned}$$

□

Exercice 9. Si $A_1 \supset A_2 ...$ et l'un des A_n a une mesure finie, montrer que

$$\mu(\bigcap_n A_n) = \lim_n \downarrow \mu(A_n)$$

Contre-exemple sur $\mathbb{N}$ avec $A_n = [n, \infty]$.

Démonstration. Soit n_0 tel que $\mu(A_{n_0}) < \infty$. Pour $n \geq n_0$, soit

$$B_n = A_{n_0} \setminus A_n,$$

comme $\mu(A_n) \leq \mu(A_{n_0}) < \infty$,

$$\mu(B_n) = \mu(A_{n_0}) - \mu(A_n).$$

Comme $\cup_n B_n$ est une union croissante,

$$\mu(\cup_n B_n) = \lim_n \uparrow \mu(B_n)$$

càd

$$\mu(A_{n_0}) - \mu(\cap_n A_n) = \mu(A_{n_0}) - \lim_n \mu(A_n)$$

□

Exemples 3 (Masses de Dirac). *1. Soit $E = \mathbb{R}$, muni des Boréliens. Soit $x \in \mathbb{R}$, et*

$$\delta_x(A) = 1_{x \in A}.$$

Montrer que c'est une mesure. δ_x s'appelle masse de Dirac *en x.*

2. *Soit* $(c_i)_{i\in I}$ *une famille de nombres rééls, et* $(x_i)_{i\in I}$ *une famille de rééls. Soit*

$$\mu = \sum_{i\in I} c_i \delta_{x_i}.$$

On rapelle qu'une somme arbitraire de nombres positifs vaut

$$\sum_{i\in I} c_i = \begin{cases} +\infty \text{ si } I \text{ n'est pas dénombrable} \\ \sum_{k\geq 1} c_{i_k} \text{ si } I = \{i_1, i_2, \ldots\} \text{ est dénombrable.} \end{cases}$$

Montrer que μ *est bien une mesure.*

Exercice 10. avec les notations de 3. Soit $A = [1, 1000]$, $c_k = \alpha^k, x_k = k, k \geq 1$ pour $\alpha > 0$.

Exercice 11. Montrer que $(\mathbb{R}, \mathcal{P}(\mathbb{R}), \mu_{comptage})$ n'est pas σ-finie.

Exercice 12. Calculer $f(x) = \limsup_n (-1)^{[nx]}$, $g(x) = \liminf_n (-1)^{[nx]}$.

Démonstration. Pour $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique entier $k \in \mathbb{Z}$ et un unique nombre de $[0,2[$ noté $\{y\}$ tel que

$$y = 2k + \{y\}.$$

Et on a

$$(-1)^y = \begin{cases} 1 \text{ si } \{y\} \in [0,1[\\ -1 \text{ si } \{y\} \in [1,2[. \end{cases}$$

Soit $x \in \mathbb{R}$. Si $\{x\}$ est irrationel, alors $\{nx; n \in \mathbb{N}\}$ est dense dans $[0,2[$, et donc il y a une infinité de n pour lesquels $[nx]$ est pair et une infinité de n pour lesquels il est impair. Ainsi on a

$$\limsup f_n(x) = f(x) = 1$$
$$\liminf f_n(x) = g(x) = -1.$$

Supposons maintenant $\{x\} = \frac{p}{q}$ pour des entiers p et q premiers entre eux. Remarquons tout d'abord que l'infinité de valeurs $\{2nqx = 2np; n \geq 1\} = 0$ assure $f(x) = 1$. Il reste à déterminer la lim inf. Alors $\{nx : n \in \mathbb{N}\} = \{np/q; n \in \mathbb{N}\}$ prend ses valeurs dans $\{k/q; 0 \leq k < 2q\}$, assimilé au groupe $(\mathbb{Z} \setminus 2q\mathbb{Z}, +)$. A moins que $p = 0$ dans $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$, la suite $(kp)_{k\geq 1}$ passe une infinité de fois par $\{q+1, \ldots, 2q-1\}$ dans $\mathbb{Z}/2q\mathbb{Z}$. En définitive, à moins que $p = 0$, $g(x) = -1$. Le cas $p = 0$ correspond au cas où $x = 2k$ pour un certain entier $k \in \mathbb{Z}$. On a dans ce cas $\limsup_n (-1)^{2nk} = 1$. En définitive

$$f(x) = 1, x \in \mathbb{R}$$
$$g(x) = \begin{cases} 1 \text{ si } x \text{ est un entier pair,} \\ -1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

□

4ème cours

Exemple 4. Soit $f(x)$ =partie entière de x. En décomposant f sous sa forme canonique, calculer

$$\int_{[0,5]} f(x)\lambda(dx)$$

Démonstration. On a sur $[0,5]$

$$f = \sum_{k=0}^{5} k1_{[k,k+1[}$$

donc f est e.m.p. On a par définition

$$\int_{[0,5]} fd\lambda = \sum_{k=0}^{5} k\mu([0,5] \cap [k,k+1[) = \sum_{k=0}^{4} k = 1+2+3+4 = 10.$$

□

Exercice 13. Montrer croissance de l'intégrale pour les fonctions e.m.p

Démonstration. Soit f et g des fonctions e.m.p telles que $f \leq g$. Soit $\alpha_i, i = 1, \dots, p$ les valeurs prises par f, et $\beta_j, j = 1, \dots, q$ les valeurs prises par g. Alors $g - f$ prend ses valeurs dans $\{(\alpha_i - \beta_j, 1 \leq i \leq p, 1 \leq j \leq q)\}$, qui est fini, et f est mesurable comme différence de fonctions linéaires. Donc $f - g$ est e.m.p., et on a

$$\int f d\mu + \int (g-f) d\mu = \int g d\mu$$

d'où $\int f \leq \int g$. □

5ème cours

Exercice 14. Montrer par un contre-exemple qu'on ne peut pas définir l'intégrale d'une f.m.p. f comme

$$\int_E f d\mu := \inf_{h \geq f, h \text{ étagée}} \int h d\mu$$

Démonstration. Soit $f(x) = \frac{1}{x^2} 1_{x \neq 0}$. Soit h une fonction étagée positive $\geq f$ sur $\mathbb{R}$. Alors

$$h = \sum_i \alpha_i 1_{A_i}$$

pour une partition $(A_i), i = 1, \ldots, q$ de $\mathbb{R}$ et des réels α_i. Il existe au moins un A_{i_0} de mesure de Lebesgue infinie car

$$\sum_{i=1}^{q} \lambda(A_i) = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty.$$

On a alors

$$\int h d\mu \geq \alpha_{i_0} \mu(A_{i_0})$$

avec (comme $h \geq f$)

$$\alpha_{i_0} \geq \sup_{x \in A_{i_0}} \frac{1}{x^2} > 0,$$

d'où

$$\int h d\lambda = +\infty.$$

On aboutit à

$$\int_{\mathbb{R}^*} \frac{1}{x^2} dx = +\infty,$$

ce qui est faux. □

Exercice 15. Pour f integrable, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\int \lambda f = \lambda \int f$

- (Croissance).
- (Linéarité en la mesure)

$$\int f d(\mu + \mu') = \int f_+ d(\mu + \mu') - \int f^- (\mu + \mu')$$

Démonstration. 1. On a

$$\int \lambda f = \int \lambda (f^+ - f^-) = \int \lambda f^+ - \int \lambda f^- = \lambda \int f^+ - \int \lambda f^-$$

2. Si $f \leq g$, $g - f$ est une fonction mesurable positive, donc

$$\int f = \int g - \int g - f \leq \int g.$$

3. On a

$$\int f d(\mu+\mu') = \int (f^+ - f^-) d(\mu+\mu') = \int f^+ d(\mu+\mu') - \int f^- d(\mu+\mu')$$
$$= \int f^+ d\mu + \int f^+ d\mu' - \int f^- d\mu - \int f^- d\mu' = \int (f^+ - f^-) d\mu + \int (f^+ - f^-) d\mu' = \int f d\mu + \int f d\mu'.$$

□

Proposition 5. *Soit I un ensemble dénombrable, et $N_i, i \in I$ une famille d'ensembles négligeables. Montrer que $\cup_{i\in I} N_i$ est négligeable. De meme si les A_i sont de mesure complète, alors $\bigcap A_i$ également.*

Donner un contre exemple si I est indénombrable.

Démonstration. On a

$$\mu(\cup_i N_i) \leq \sum_{i\in I} \mu(N_i) = 0$$

car I est dénombrable. On a

$$\mu((\bigcap_i) A_i)^c) = \mu(\cup_{i\in I}(A_i^c)) = 0$$

d'après la question précédente (les A_i^c sont par définition négligeables).

Contre-exemple : Avec $I = \mathbb{R}, N_x = \{x\}$ pour $x \in I$,

$$\lambda(U_i N_i) = \lambda(\mathbb{R}) = +\infty.$$

□

6ème cours

Exercice 16. Phénomène de concentration de la masse.

Erreur dans l'énoncé, j'aurais du définir

$$f_n(x) = (n - n^2 x)^+, x > 0.$$

(j'ai mis des points aux copies cohérentes) J'aurais alors

$$f_n(x) = \begin{cases} n - n^2 x \text{ si } x \in [0, 1/n] \\ 0 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Donc pour $x > 0$, à partir d'un certain n, $1/n < x$ et donc $f_n(x) \to 0$, donc $f_n(x) \to 0$ pour tout x. et

$$\int_{\mathbb{R}_+} f_n = \int_0^{1/n} (n - n^2 x)dx = \frac{1}{n}n - n^2 \int_0^{1/n} xdx = 1 - n^2 [x^2/2]_0^{1/n} = 1 - n^2 \frac{1}{2n^2} = \frac{1}{2} \to \frac{1}{2} \neq 0.$$

Exercice 17. Soit une suite de rééls (u_n). Alors avec

$$\overline{u_n} = \inf_{k \geq n} u_k,$$

$$\liminf u_n = \liminf \overline{u_n} = \lim \overline{u_n}$$

car $(\overline{u_n})$ est croissante.

Démonstration. $(\overline{u_n})$ est croissante car pour $n \geq 1$,

$$\inf_{k \geq n} u_k \leq \inf_{k \geq n+1} u_k \quad \text{(inf sur un plus petit ensemble).}$$

Donc $\overline{u_n}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}_+}$, ce qui implique $\boxed{\liminf \overline{u_n} = \lim \overline{u_n}}$. On a aussi trivialement

$$\overline{u_n} \leq u_n \text{ car } \overline{u_n} = \inf(u_n, u_{n+1}, \dots).$$

Donc $\boxed{\liminf \overline{u_n} \leq \liminf u_n}$. Dans l'autre sens, $\lambda = \liminf u_n$ est la plus petite valeur d'adhérence de (u_n), donc pour tout $\varepsilon > 0$, (u_n) n'a qu'un nombre fini de termes plus petits que $\lambda - \varepsilon$, donc à partir d'un certain rang n_0 (une fois le rang ayant dépassé cet ensemble fini de termes), pour $n \geq n_0$,

$$\overline{u_n} = \inf_{k \geq n} u_k \geq \lambda - \varepsilon$$

d'où on déduit $\lim \overline{u_n} \geq \lambda - \varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$, càd $\boxed{\lim \overline{u_n} \geq \lambda = \liminf u_n}$.

□

Exercice 18. $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes 2}$.

Démonstration. On a dans un sens

$$\mathcal{B}(\mathbb{R}^2) = \sigma(]a; b[\times]c, d[; a \leq b, c \leq d \in \mathbb{R}) \subset \sigma(A \times B; A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})) = \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes 2}$$

car chaque $]a, b[$ et chaque $]c, d[$ sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})$. Pour l'autre sens, il faut montrer que chaque $A \times B \in \mathcal{A} \times \mathcal{B}$ est dans $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (ainsi $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} = \sigma(\mathcal{A} \times \mathcal{B})$ sera également inclus dans $\sigma(\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)) = \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$). Comme $A \times B = (A \times \mathbb{R}) \cap (\mathbb{R} \times B)$, il suffit de montrer $A \times \mathbb{R} \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ (idem pour $\mathbb{R} \times B$). Or $A \times \mathbb{R} = \pi_1^{-1}(A)$ où $\pi_1(x, y) = x$ est continue, donc $\mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$ mesurable.

□

7 ème cours

Exercice 19. L'opération $\ _x$ permute avec toutes les opérations sur les ensembles

$$(\bigcap_{i\in I} C_i)_x = (\bigcap_i (C_i)_x),$$
$$(\bigcup_{i\in I} C_i)_x = (\bigcup_i (C_i)_x),$$
$$(C_x)^c = (C^c)_x$$
$$(C_1 \setminus C_2)_x = (C_1)_x \setminus (C_2)_x.$$

Démonstration. Soit $x \in E$.

$$(\bigcap_i C_i)_x = \{y : (x,y) \in \bigcap C_i\} = \{y : \forall i, (x,y) \in C_i\} = \bigcap_i (C_i)_x$$
$$(C_1 \setminus C_2)_x = \{y : (x,y) \in C_1 \setminus C_2\} = \{y : (x,y) \in C_1\} \setminus \{y : (x,y) \in C_2\} = (C_1)_x \setminus (C_2)_x$$
$$(C_x)^c = F \setminus (C_x) = (F_x \setminus C_x) = (F \setminus C)_x = (C^c)_x$$
$$(\bigcup_i C_i)_x = (((\bigcap_i) C_i^c)^c)_x = ((\bigcap_i (C_i)_x^c))^c = \cup_i (C_i)_x$$

□

Exo :<u>Vérifions que $\mu \otimes \nu$ est bien une mesure :</u>

$\mu(\emptyset) = 0$

Soit (C_n) une famille de mesurables de $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ 2 à 2 disjoints.

$$\begin{aligned}
\mu \otimes \nu(\cup_n C_n) &= \int_E \nu(\cup_n C_n)_x \mu(dx) = \int_E \nu(\cup_n (C_n)_x)\mu(dx) \\
&= \int_E \sum_n \nu((C_n)_x)\mu(dx) \text{ car les } (C_n)_x \text{ sont disjoints } ((C_n)_x \cap (C_m)_x) = (C_n \cap C_m)_x = \emptyset \\
&= \sum_n \int_E \nu((C_n))_x \mu(dx)
\end{aligned}$$

8 ème cours

Exercice 20. $E = F = [0,1]$ muni de $\mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}}) \bigcap E$ avec boreliens et

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy.$$

Expliquer pourquoi Fubini ne s'applique pas.

Démonstration.

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 |f(x,y)| dx \right) dy \geq \int_0^1 \left(\int_0^y |f(x,y)| dx \right) dy = \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2} dx \right) dy$$
$$\int_0^1 \left[\frac{x}{x^2+y^2} \right]_0^y dy = \int_0^1 \frac{1}{2y} dy = \infty.$$

f n'est donc pas integrable et on ne peut pas appliquer Fubini (pour fonctions quelconques). □

Exercice 21. Montrer que $\varphi(x,y) = (xy, y)$ est un $\mathcal{C}^1$-diffeomorphisme sur

$$E = \{(x,y) : x > 0, y > 0, xy > 1\}.$$

et calculer son jacobien.

(1 point pour le dessin de E).
On pose pour $(x,y) \in E$

$$u = xy > 1$$
$$v = y > 0$$

qui amene a

$$x = u/v > 0$$
$$y = v > 0$$

On a réciproquement, pour $(u > 1, v > 0)$,

$$x = u/v$$
$$y = v$$

vérifie bien $(x,y) \in E$.
(Formellement, $\varphi(x,y) = (xy, y)$ est une bijection $F \to E$)
On a donc

$$J_\varphi = (1/v, -u/v^2, 0, 1) \to 1/v$$

9ème cours