Licence MIA 3ème année, 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Correction partiel du 12/11/2012

Exercice 1. Voir cours

Exercice 2.

1. Soit $f_n(x) = \exp(\arctan(nx)), x > 0$ pour $n \geq 1$. f_n est continue donc mesurable. A $x > 0$ fixé, la suite $\arctan(nx)$ est croissante, car arctan est croissante, et converge vers $\lim_{y\to\infty} \arctan(y) = \pi/2$, et donc, comme exp est également croissante, $\exp(\arctan(nx))\frac{1}{x}$ converge en croissant vers $\exp(\pi/2)\frac{1}{x}$. Donc (f_n) est une suite croissante de f.m.p., donc d'après le TCM,

$$\int_{\mathbb{R}_+^*} f_n d\lambda \to \int \lim_n f_n d\lambda = \exp(\pi/2) \int_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{x} dx = +\infty.$$

2. Soit $x > 0$,

$$f_n(x) = \frac{x^2}{x + x^3/n} e^{-x^2} \to x e^{-x^2},$$

continue donc mesurable, de plus, comme x^3/n est décroissante, $(1 + x^3/n)^{-1}$ est croissante, et donc (f_n) est une suite croissante de f.m.p.. Le TCM nous dit alors que

$$\lim \int f_n d\lambda = \int \lim f_n d\lambda = \int x e^{-x^2} dx = \frac{-1}{2} \int (e^{-x^2})' dx = \frac{-1}{2} [e^{-x^2}]_0^\infty = \frac{1}{2}.$$

3. $g_n(x) = x^{2n}(1-x) \geq 0, x > 0, n \geq 0$ est continue donc mesurable sur $E =]0,1[$, et positive. D'après le théorème de Beppo-Levi on a donc que

$$\int_0^1 \sum_{n\geq 0} g_n = \sum_{n\geq 0} \int_0^1 g_n = \sum_{n\geq 0} \int x^{2n} dx - \int x^{2n+1} dx$$
$$= \sum_{n\geq 0} [\frac{x^{2n+1}}{2n+1}]_0^1 - [\frac{x^{2n+2}}{2n+2}] = \sum_{n\geq 0} \frac{1}{2n+1} - \frac{1}{2n+2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n}.$$

Maintenant, pour $x \in]0,1[$,

$$\sum_{n\geq 0} g_n = (1-x) \sum_{n\geq 0} x^{2n} = \frac{1-x}{1-x^2} = \frac{1}{1+x}.$$

On a donc

$$\sum_{n\geq 0} \frac{(-1)^n}{n} = \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = [\ln(1+x)]_0^1 = \ln(2).$$

Exercice 3.

1. – (i) $\nu(\emptyset) = \int_\emptyset f d\mu = 0$ car $\mu(\emptyset) = 0$.

– (ii) Soit $A_n, n \geq 1$ des mesurables disjoints, alors

$$\nu(\cup_{n\geq 1} A_n) = \int_{\cup_{n\geq 1}} f d\mu = \int \lim f_n d\mu$$

où $f_n = f.1_{\cup_{1\leq k\leq n} A_k}$ est mesurable positive croissante en n

$$= \lim \int f_n \text{ par le TCM}$$

$$= \lim \sum_{k=1}^{n} \int_{A_k} f d\mu \text{ (Relation de Chasles)}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \int_{A_k} f d\mu = \sum_{k\geq 1} \mu(A_k).$$

2. Si $\mu(A) = 0$, $\int_A f d\mu = 0$ ($f = 0$ p.p.).
3. Soit $A = [a, b], a, b \in \mathbb{R} (A = \emptyset$ si $a > b)$. Alors

$$\nu(A) = \lambda(g^{-1}([a, b])) = \lambda([a^{1/3}, b^{1/3}]) = b^{1/3} - a^{1/3} = \frac{3}{4}[(x^{4/3})']_a^b = \int_a^b f(x) \text{ où } f(x) = \frac{3}{4} x^{4/3}.$$

   Donc ν coincide sur le π-système $\mathcal{C} = \{[a, b]; a, b \in \mathbb{R}\}$ avec la mesure de densité f, donc par unicité du prolongement sur $\sigma(\mathcal{C})$, ν est la mesure de densité f.
4. Soit $\nu = \delta_0$ la mase de Dirac en 0. Alors $\lambda(\{0\}) = 0$ alors que $\nu(\{0\}) = 1$, donc ν n'est pas absolument continue par rapport à λ. De plus, si ν avait une densité f, on aurait

$$\nu(\{0\}) = \int_{\{0\}} f d\lambda = 0 \text{ car } \lambda(\{0\}) = 0.$$

Exercice 4.

1. f_n est continue comme indicatrice de l'ensemble mesurable A_n pour tout $n \geq 1$. f est mesurable comme lim inf de fonctions mesurables. Pour $x \in E$, $f(x)$ est une valeur d'adhérence de la suite $(f_n(x))$ à valeurs dans $\{0, 1\}$, donc $f(x)$ est dans $\{0, 1\}$.
2. Soit $x \in [0, 1]$. Alors si $x < 1/2$, on a la sous-suite $f_{2n+1}(x) = 0$, donc $0 \geq \liminf_n f_n(x)$, qui est aussi ≥ 0 d'après la question 1. Idem si $x > 1/2$ avec $f_{2n}(x)$, $f(x) = 0$. Par contre si $x = 1/2$, $\liminf_n f_n(x) = \lim_n 1 = 1$. Donc $f(x) = 1_{\{x=1/2\}}$.
3. $A = f^{-1}(\{1\})$ est mesurable car f l'est. La limite supérieure serait par analogie

$$\limsup_n A_n = \{x : \limsup_n f_n(x) = 1\}.$$

   Dans le cas de la question 2, $\limsup_n A_n = [0, 1]$.
4. Soit $x \in [0, 1]$. La suite x_n étant dense, pour tout $n_0 \geq 1$, il existe $n \geq n_0$ tel que $|x - x_n| \leq \varepsilon$. On peut donc construire par récurrence une sous-suite $(x_{\varphi(n)})$ telle que $|x_{\varphi_n} - x| \leq \varepsilon$. On a donc $x \in A_{\varphi_n}, n \geq 1$, et donc $\limsup_n 1_{A_n}(x) = 1$, et ce pour tout $x \in [0, 1]$. Donc $\boxed{\limsup_n A_n = [0, 1]}$.

   Soit encore $x \in [0, 1]$. Comme $\varepsilon > 1/2$, il existe $y \in [0, 1]$ tel que $|x - y| > \varepsilon$. On note $\alpha = \varepsilon - |x - y| > 0$. Comme (x_n) est dense, x_n se retrouve infiniment souvent à une distance de moins de $\alpha/2$ de y, et dans ce cas $|x - x_n| > \varepsilon$, i.e. $x \notin A_n$. On peut donc trouver une infinité de A_n, et donc une sous-suite, pour lesquels $x \notin A_n$. On en déduit $x \notin \liminf_n A_n$. Donc $\boxed{\liminf_n A_n = \emptyset}$.