UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

UFR de mathématiques et informatique

Intégration et Analyse de Fourier, Licence 3ème année 2012-2013

Examen, 1re session (durée 1h30)

Tous les documents et tous les appareils électroniques sont interdits. La qualité de la présentation et de la rédaction constitue une part importante dans l'appréciation de la copie.

exercice 1. Voir cours.

exercice 2.

1. Pour $x \in \mathbb{R}$,

$$f(t,x) = \frac{1}{2}e^{-t^2}(e^{tx} + e^{-tx}), t \in \mathbb{R},$$

   est mesurable en t car continue sur $\mathbb{R}$, et donc intégrable en tout point de $\mathbb{R}$. Pour l'intégrabilité en $+\infty$ et $-\infty$, on remarque que $f(t,x) \sim_{x\to\pm\infty} e^{-t^2}$ qui est positive et intégrable.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Soit $V = [x-1, x+1]$ un voisinage de $x \in \mathbb{R}$. Alors pour $t \in \mathbb{R}, y \in V$,

$$|f(t,y)| \leq g(t) = e^{-t^2}e^{|t|(|x|+1)|},$$

   et $g(t) \sim e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$. De plus, f est continue en x, donc d'après le théorème de continuité, F est continue en x.

3. $f(t,x)$ est dérivable en x, et pour $x \in \mathbb{R}$ et $y \in V = [x-1, x+1]$,

$$|\frac{\partial f}{\partial y}f(t,y)| = |\frac{1}{2}te^{-t^2}sh(u)| \leq |t|g(t)$$

   avec g comme précédemment, $|t|g(t)$ est bien intégrable. On en déduit que F est dérivable et de dérivée

$$F'(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-t^2}tsh(tx)dt.$$

   On fait l'IPP $(u' = te^{-t^2}, v = sh(tx))$, $(u = -\frac{1}{2}e^{-t^2}, v' = xch(tx))$, on a alors

$$F'(x) = [-\frac{1}{2}e^{-t^2}sh(tx)]_{-\infty}^{\infty} - \int -\frac{1}{2}e^{-t^2}xch(tx)dt = \frac{x}{2}F(x).$$

4. La résolution de l'ED linéaire du primer ordre donne

$$F(x) = F(0)e^{x^2/4} = \sqrt{\pi}e^{x^2/4}.$$

exercice 3. On fait le changement de variable, pour $x, y, z \in D$.

$$(u, v, w) = \varphi(x, y, z) = (xy, xz, yz)$$

1. On a

$$\begin{cases} x/z = u/w \\ y/z = u/v \\ y/x = w/v \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} xz.(x/z) = x^2 = vu/w \\ yx.(y/x) = y^2 = uw/v \\ zx.(z/x) = z^2 = vw/u \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \sqrt{vu/w} \\ y = \sqrt{uw/v} \\ z = \sqrt{vw/u} \end{cases} \quad \text{car } x, y, z > 0.$$

2. La jacobienne est

$$J_\varphi(x, y, z) = \begin{pmatrix} y & x & 0 \\ z & 0 & x \\ 0 & z & y \end{pmatrix}$$

et le jacobien est donc $\det(J_\varphi(x, y, z) = xyz$. Si le changement de variables est valables, on pourra substituer dans l'intégrale $|xyz|dxdydz = dudvdw$.

φ est injective grace aux formules du 1. Soit $(u, v, w) \in]1, 2[^3$. Alors x, y, z définis par 1. vérifient bien $x, y, z \in D$ et $\varphi(x, y, z) = (u, v, w)$. φ est bien à valeurs dans $]1, 2[^3]$ donc φ est une bijection de D vers $]1, 2[^3$, d'inverse $\varphi^{-1}(u, v, w) = (\sqrt{wu/v}, \sqrt{uw/v}, \sqrt{wv/u})$, de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]1, 2[^3$. Comme le jacobien ne s'annule pas sur D, φ est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme.

Par symétrie, on a

$$\begin{aligned} I &= 3 \int_D x^2 xyz dxdydz = 3 \int_1^2 \int_1^2 \int_1^2 \frac{wu}{v} dudvdw = 3 (\int_1^2 wdw)^2 \int_1^2 \frac{1}{v} dv \\ &= 3([x^2/2]_1^2)^2 [\ln(v)]_1^2 = 3(4/2 - 1/2)^2 \ln(2) = 27/4. \ln(2). \end{aligned}$$

exercice 4.

1. (a) $\emptyset \in \mathcal{A}$ car $\emptyset = \emptyset^{-1}$.

   (b) Pour $A \in \mathcal{A}$,

   $$(A^c)^{-1} = \{x \in \mathbb{R}_+^* : 1/x \in A^c\} = \{x : 1/x \notin A\} = \{x : 1/x \in A\}^c = (A^{-1})^c = A^c$$

   donc $A^c \in \mathcal{A}$.

   (c) Soit $(A_i)_{i \in I}$ une famille (dénombrable) d'éléments de $\mathcal{A}$. Alors

   $$(\cup_i A_i)^{-1} = \{x : 1/x \in \cup A_i\} = \cup_i \{x : 1/x \in A_i\} = \cup_i (A_i)^{-1} = \cup_i A_i$$

   donc $\cup_i A_i \in \mathcal{A}$.

2. Soit A un borélien de $\mathbb{R}$. Il faut montrer que $\varphi^{-1}(A) \in \mathcal{A}$, càd que

$$(\varphi^{-1}(A))^{-1} = \varphi^{-1}(A).$$

(Remarquons que les deux exposants "-1" n'ont pas la meme signification ; l'un dénote l'image réciproque d'une fonction et l'autre la transformation d'un ensemble définie dans cet exercice). On a

$$\begin{aligned} (\varphi^{-1}(A))^{-1} &= \{x : 1/x \in \varphi^{-1}(A)\} = \{x : \varphi(1/x) \in A\} = \{x : |\ln(1/x)| \in A\} = \{x : |-\ln(x)| \in A\} \\ &= \{x : |\ln(x)| \in A\} = \{x : \varphi(x) \in A\} = \varphi^{-1}(A), \end{aligned}$$

3. Il suffit de refaire le raisonnement au-dessus.

exercice 5.

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour $n \geq |x| + 1$, $1_{[n,2n]}(x) = 0$, et donc $f_n(x) \to 0$. En particulier $f_n(x) \to 0$, et ce pour tout $x \in \mathbb{R}$.
2. Sa limite étant $f = 0$, il faut montrer que l'on n'a pas

$$\|f_n - f\|_2 = \sqrt{\int f_n^2(x)dx} \to 0.$$

En effet,

$$\int f_n^2 = \int 1_{[n,2n]}(x)^2 \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2 dx = \frac{1}{n} \int_{\mathbb{R}} 1_{[n,2n]}(x)dx = \frac{1}{n} n = 1$$

et $\sqrt{1} = 1$ ne tend pas vers $0 \ldots$

3. On a

$$\|f_n - f\|_{L^p}^p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f_n|^p\right) = \left(\int_n^{2n} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^p\right) = \frac{2n - n}{n^{p/2}} = n^{1-p/2}$$

et comme $1 - p/2 < 0$, la dernière expression converge bien vers 0, doù

$$f_n \stackrel{L^p}{\to} f.$$