Licence MIA 3ème année, année 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Fiche de TD n^{o}8 : Espaces L^p

Exercice 1. Soit $p \in]1, +\infty[$. Dans chacun des cas suivants, donner les valeurs de q pour lesquelles f_p appartient à $L^q(\mathbb{R}, dm)$:

1. $f_p(x) = x^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$;
2. $f_p(x) = x^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)$;
3. $f_p(x) = (x(1+\ln^2 x))^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{]0,1[}(x)$;
4. $f_p(x) = (x(1+\ln^2 x))^{-\frac{1}{p}} \mathbf{1}_{]1,+\infty[}(x)$.

Exercice 2. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré tel que $\mu(E) < \infty$, et soient $1 \leq p \leq q \leq +\infty$. Montrer que $L^\infty(E, \mu) \subset L^q(E, \mu) \subset L^p(E, \mu) \subset L^1(E, \mu)$. Comparer cette situation avec celle des espaces l^p. Montrer par un exemple que l'hypothèse $\mu(E) < +\infty$ est nécessaire.

Exercice 3.

1. Donner un exemple de fonction positive intégrable sur $\mathbb{R}_+$ mais qui ne tend pas vers 0 en $+\infty$.
2. Meme question en supposant de plus f continue (ne pas hésiter à faire un dessin).
3. Meme question avec de plus f continue et non-bornée.

Exercice 4. Donner un exemple de suite (f_n) dans $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ telle que

1. (f_n) converge vers f presque partout mais (f_n) ne converge pas vers f dans $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.
2. (f_n) converge vers f dans $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$ mais (f_n) ne converge pas vers f presque partout.
3. (f_n) converge vers f presque partout, $(\int_{\mathbb{R}} f_n d\lambda)$ converge vers $\int_{\mathbb{R}} f dm$, mais (f_n) ne converge pas vers f dans $L^1(\mathbb{R}, \lambda)$.

Exercice 5. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et soit f une fonction de E dans $\mathbb{R}^+$ intégrable. pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $f_n : x \mapsto f_n(x) = \min(f(x), n)$.

1. Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f_n \in L^1(E, \mu)$ et que (f_n) converge vers f dans $L^1(E, \mu)$.
2. En déduire que $L^1(E, \mu) \cap L^\infty(E, \mu)$ est dense dans $L^1(E, \mu)$.

Exercice 6. (Convolution) On considère $f \in L^p(\mathbb{R})$ et $g \in L^q(\mathbb{R})$ où p et q vérifient $0 < p, q \leq +\infty$. On note pour tout $x \in \mathbb{R}$, $(f * g)(x) = \int f(t)g(x-t)dt$.

1. Montrer que si $q = 1$, la fonction $(f * g)$ est définie presque-partout, est dans L^p et satisfait $||(f * g)||_p \leq ||f||_p ||g||_1$.

2. On suppose dans cette question que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Montrer que $(f*g)$ est définie partout, vérifie $||(f*g)||_\infty \leq ||f||_p||g||_q$ et est continue (on pourra introduire la fonction retard inverse $\delta_x g(t)=g(x-t)$).
3. On suppose dans cette question que f et g sont à support compact. Montrer que $(f*g)$ est à support compact.
4. On admet l'existence d'une suite de fonctions positives continues à support compact $(\varphi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ telles que $\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi_k(x)dx=1$ pour tout $k\in\mathbb{N}$ et vérifiant que pour tout $\eta>0$, $\lim_{k\to+\infty}\int_{[-\eta,\eta]^c}\varphi_k(x)dx=0$. Montrer que pour toute fonction $f\in L^p$, $(f*\varphi_k)$ tend vers f dans l'espace L^p.
5. En déduire la densité des fonctions continues à support compact dans L^p.