UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Licence MIA 3ème année, 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Fiche de TD n°7 : Théorèmes de Fubini et changements de variables

Exercice 1. Refaire l'exercice 5 du TD5 et l'exercice 6 du TD4 avec le théorème de Fubini.

Exercice 2. Soit f une fonction mesurable de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}_+$. Dire si les parties suivantes de $\mathbb{R}^2$ sont mesurables et si oui, exprimer leur mesure à l'aide de la fonction f : $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; 0 \leq y \leq f(x)\}$, $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2; y = f(x)\}$.

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{B}(E), \lambda^{(2)})$, où $E :=]0,+\infty[\times]a,b[$, $\lambda^{(2)}$ la mesure de Lebesgue, et a et b deux réels strictement positifs, avec $a < b$. Montrer que l'application f définie sur E par $f(x,y) = e^{-xy}$ est dans L^1 et en déduire l'intégrale : $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-ax} - e^{-bx}}{x} dx$.

Exercice 4. Soit $\Gamma(a) = \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$ et $B(a,b) = \int_0^1 t^{a-1}(1-t)^{b-1} dt$, $a, b > 0$. Montrer que $B(a,b) = \dfrac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$.

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$, on note b_n le volume de la boule-unité de $\mathbb{R}^n$, i.e. $b_n := \lambda^{(n)}(B_n)$ où $\lambda^{(n)}$ est la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^n$ et

$$B_n := \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n; x_1^2 + \ldots x_n^2 \leq 1\}.$$

1. Que valent b_2, b_3 ?
2. Etablir une relation de récurrence entre b_n et b_{n-2}, pour tout $n \geq 3$, en remarquant que $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1$ équivaut à $x_1^2 + x_2^2 \leq 1$ et $x_3^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 - x_1^2 - x_2^2$.
3. En déduire l'expression de b_n pour tout entier $n \geq 2$.

Exercice 6. Le but de l'exercice est de calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(x)}{x} dx$ (au sens de Riemann).

1. Soit $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(u,v) = \frac{\sin(u)}{u} e^{-v}$ si $u \neq 0$ et $f(0,v) = e^{-v}$. Montrer que f est intégrable sur $]0,a[\times]0,+\infty[$ où a est un réel strictement positif fixé.
2. Soit $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $T(x,y) = (x, xy)$. Montrer que T est un difféomorphisme de $]0,a[\times]0,+\infty[$.
3. Soit g telle que $g(x,y) = e^{-xy}\sin(x)$. Montrer que g est intégrable sur $]0,a[\times]0,+\infty[$. Calculer pour tout $a > 0$, $\displaystyle\int_0^a \frac{\sin(x)}{x} dx$ et en déduire la limite de cette intégrable lorsque a tend vers l'infini.

Exercice 7. En utilisant un changement de variables, calculer l'intégrale de f sur D avec

1. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \pi^2 < x^2 + y^2 \leqslant 4\pi^2\}$; $f(x,y) = \sin\sqrt{x^2+y^2}$;

2. $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leqslant 1\right\}$ avec $a, b > 0$; $f(x,y) = x^2 + y^2$;
3. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 1, 0 \leqslant z \leqslant h\}$ avec $h > 0$; $f(x,y,z) = z$;
4. $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < x^2 \leqslant y \leqslant 2x^2, 1/x \leqslant y \leqslant 2/x\}$; $f(x,y) = x + y$ (changement de variable $u = y/x^2, v = xy$) ;
5. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x \geqslant 0, y \geqslant 0, z \geqslant 0, x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1\}$; $f(x,y,z) = xyz$;
6. $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid 1 \leqslant x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4\}$; $f(x,y,z) = (x^2 + y^2 + z^2)^\alpha$.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ telle que : $\forall a \in \mathbb{R}, \displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|e^{|ax|}dx < +\infty$. Montrer que :

$$\int_{\mathbb{R}} f(u)e^{zu}du = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!} \int_{\mathbb{R}} u^n f(u)du.$$