UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Licence MIA 3ème année, 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Fiche de TD n°6 : Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1. Soit, pour $x \in \mathbb{R}$ et $t > 0$, $f(t,x) = e^{-t^2-\frac{x^2}{t^2}}$ et $F(x) = \int_0^{+\infty} f(t,x)\,dt$.

1. Montrer que F est continue sur $\mathbb{R}$ vérifiant $F(-x) = F(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.
2. Soit $t_0 > 0$. Montrer que l'on a $\left|\frac{\partial f}{\partial x}(t,x)\right| \leq 2Ae^{-t^2}$ pour $x \geq 0$ et $t \in V =]t_0-\varepsilon, t_0+\varepsilon[\subseteq \mathbb{R}_+^*$ et une certaine constante $A > 0$. En déduire que l'on peut dériver F sur $]0,+\infty[$.
3. Montrer que F satisfait une équation différentielle sur $]0,+\infty[$ (On pourra commencer par effectuer le changement de variables $u = 1/t$ dans l'expression de $F'(x)$). En déduire l'expression de F sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Montrer que l'on définit une fonction infiniment dérivable sur $]0,+\infty[$ par

$$F(t) = \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\cos(xt)dx$$

Trouver l'expression explicite de F.

Exercice 3. Soit $F(x)$ la somme de la série $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{-nx}}{n}$ pour $x > 0$. À l'aide du théorème de dérivation sous la somme, exprimer $F'(x)$ et en déduire l'identité

$$F(x) = -\int_x^{+\infty} \frac{dt}{1-e^t}, \quad \text{pour tout } x > 0.$$

Exercice 4. Soit, pour $t > 0$, $F(t) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{t+x^2}\,dx$.

1. Montrer que F est infiniment dérivable sans calculer l'intégrale.
2. Calculer F et ses dérivées. En déduire la valeur des intégrales $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(1+t^2)^n}$, pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 5.

1. Montrer que la fonction $F : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}}{1+t^2}dt$ est définie pour tout $x \in \mathbb{R}_+$ et à valeurs réelles.
2. Montrer que F est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et vérifie : $\forall x \in \mathbb{R}_+^*, F''(x) + F(x) = \frac{1}{x}$. En déduire une formule explicite de F.

Exercice 6. On définit, la fonction Gamma d'Euler sur $]0,+\infty[$, par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

1. Montrer que Γ est continue sur $]0,+\infty[$.
2. Montrer que Γ est dérivable sur $]0,+\infty[$.
3. Montre que $\forall x \in]0,+\infty[\quad \Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$.

Exercice 7. Etudier le domaine de définition, la continuité et la dérivabilité des fonctions définies par

$$F(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2+t^2}dt \ , \ G(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt}-e^{-t}}{t}dt$$

Exercice 8. Déterminer les limites suivantes après avoir justifié l'existence des intégrales :

$$\lim_{x\to 0^+} \int_x^{3x} \frac{t}{\tan^2 t}dt, \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x^3}\int_0^{x} \frac{t^2}{t+e^{3t}}dt.$$