Licence MIA 3ème année, année 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Fiche de TD n^{o}5 : Intégrale des fonctions quelconques et théorèmes de convergence

Exercice 1. Calculer les limites des intégrales suivantes :

1. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{n} 1_{[n,+\infty[}(x) e^{-x^2} d\lambda(x)$
2. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{[1,+\infty]} \frac{1}{nx} \mathrm{e}^{-\frac{x}{n}} d\lambda(x)$, (noter que $u \mapsto u\mathrm{e}^{-u}$ est bornée sur $\mathbb{R}^+$)
3. $\lim\limits_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^*} \sin\left(\frac{1}{nx^2}\right) d\lambda(x)$

Exercice 2. Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite décroissante de fonctions positives telle que f_1 est intégrable. Montrer que l'égalité

$$\int \lim f_n = \lim \int f_n$$

a du sens, et la prouver.

Exercice 3. Pour $n \geq 1$, soit $f_n(x) = \sin(nx)$ sur $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$. Déterminer l'existence et la valeur de

- $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x), x \in [0, E]$
- $\lim\limits_{n\to\infty} \int_E f_n(x)$.

Exercice 4. Calculer les limites quand n tend vers l'infini des suites d'intégrales suivantes en précisant avec soin les théorèmes utilisés :

1. $\int_0^1 \frac{1+nx}{(1+x)^n} dx$;
2. $\int_0^n \left(1 - \frac{x}{n}\right)^n e^{\frac{x}{2}} dx$;
3. $\int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^n} dt \quad (n \geq 3)$;
4. $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{(1+t)^n} dt \quad (n \geq 2)$;
5. $\int_0^{+\infty} \frac{n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right)}{(1+t^2)^2} dt$ (montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, $n\ln\left(1+\frac{t}{n}\right) \leq t$).

Exercice 5. Soit $a > 0$.

1. Montrer que $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \int_0^{+\infty} |e^{-nx} \sin ax| \, dx < +\infty$.

2. En déduire que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin ax}{e^x - 1}dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2 + a^2}$.

Exercice 6. Montrer que, pour tous a et b dans $]0, +\infty[$, on a :

$$\int_{\mathbb{R}_+} \frac{te^{-at}}{1 - e^{-bt}}dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(a + nb)^2}.$$

Exercice 7. Soit f_n la fonction definie sur $\mathbb{R}$ par $f_n = \frac{1}{n}1_{[0,n]}$. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$. Que vaut $\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}} f_n(x)dx$? Prouver directement qu'il est impossible de trouver une fonction g positive intégrable qui domine chaque fonction $f_n, n \geq 1$.

Exercice 8. Determiner si elle existe la limite de la suite de terme general

1. $\displaystyle\int_{[1,+\infty[} \frac{sin(\pi/2 + \pi/n)}{x^2}dx.$
2. $\displaystyle\int_{\mathbb{R}_+} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{bx}\lambda(dx)$, pour un $b < 1$.

Exercice 9. On considre un espace mesur $(X, \mathcal{A}, \mu)$ et f une fonction mesurable.

1. Montrer que si f est intégrable, alors $\lim_{a\to+\infty} a\mu\{x \in X; |f(x)| \geq a\} = 0$.
2. Montrer que la réciproque de la question précédente est fausse.
3. On suppose la mesure μ finie dans cette question. Montrer les quivalences suivantes :

$$f \text{ est intégrable} \iff \sum_{n\geq1} \mu\{|f| > n\} < +\infty \iff \sum_{n\geq1} n\mu\{n \leq |f| < n + 1\} < +\infty.$$

Exercice 10. Déterminer lorsqu'elle existe, la limite de chacune des expressions suivantes :

1. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^n (\ln x)\left(1 - \frac{x}{n}\right)^n dx.$
2. $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-n\sin^2 x} f(x)dx$ où f est une fonction intgrable sur $\mathbb{R}_+$;