Licence MIA 3ème année, année 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Fiche de TD n^{o}4 : Intégrale de Lebesgue des fonctions positives

Exercice 1. Soit $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue positive sur un intervalle ouvert I de $\mathbb{R}$. On fixe $x_0 \in I$. Le but de l'exercice est de montrer que la fonction

$$F : \begin{cases} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \displaystyle\int_{[x_0,x]} f d\lambda \end{cases}$$

est dérivable de dérivée f.

1. Vérifier que la fonction F est bien définie.
2. Pour $x \in I$ et $\varepsilon > 0$ fixés, montrer l'existence de $\eta > 0$ tel que si $|h| < \eta$ et $(x+h) \in I$ alors $|F(x+h) - F(x) - hf(x)| \leq \varepsilon|h|$.
3. Conclure.

Exercice 2. Soit $f : (E, \mathcal{A}, \mu) \to (\overline{\mathbb{R}_+}, \mathcal{B}(\overline{\mathbb{R}_+}))$ mesurable positive. Montrer que la définition de l'intégrale du cours est équivalente à la définition

$$\int_E f d\mu := \sup_{h \text{ étagée },0 \leq h \leq f} \int_E h d\mu,$$

en supposant déjà définie l'intégrale d'une fonction étagée positive.

Exercice 3. Soit $(E, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré avec $\mu(E) < +\infty$. Soit $f : E \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable et positive. Montrer que f est μ-intégrable si et seulement si $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} 2^n \mu(\{x; 2^n \leq f < 2^{n+1}\}) < +\infty$.

Exercice 4. Soit $f(x) = \dfrac{\sin(x)}{x}$ pour $x \neq 0$. Montrer que

$$\int_{\mathbb{R}^*} |f| d\lambda = +\infty.$$

Exercice 5. Le but de l'exercice est de montrer qu'un espace mesuré $(E, \mathcal{A}, \mu)$ est σ-fini ssi il existe une fonction mesurable positive f μ-intégrable telle que $f(x) > 0$ pour tout $x \in E$.

1. Supposons que E soit σ-fini, c'est-à-dire qu'il existe une suite croissante d'ensembles mesurables $E_n \uparrow E$ tels que $\mu(E_n) < \infty$ pour tout $n \geq 1$. Construire la fonction f demandée en prescrivant sa valeur sur chaque espace $E_{n+1} \setminus E_n, n \geq 1$.
2. On suppose désormais qu'il existe $f > 0$ μ-intégrable. Pour construire les ensembles E_n, on pourra considérer les ensembles de niveau de f.