Licence MIA 3ème année, année 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Fiche de TD n^{o}3 : Mesures

Exercice 1. Soit X un ensemble non vide. Décrire toutes les mesures sur la tribu grossière.

Exercice 2. Soit P une mesure de probabilité sur $(X, \mathcal{A})$, et A, B deux ensembles mesurables (i.e. dans $\mathcal{A}$). On suppose $P(A) = 3/4$ et $P(B) = 1/3$. En déduire que $1/12 \leq P(A \cap B) \leq 1/3$.

Exercice 3. a) Soit $X = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(X)$. Soit $P : \mathcal{A} \to \mathbb{R}_+$ définie par $P(A) = \frac{1}{6}\#A$. Vérifier que cela définit bien une mesure, appelée *probabilité uniforme sur* X.
b) Soit $A = \{2, 4, 6\}$ l'événement “obtenir un chiffre pair”. Montrer que l'application $P(.|A) : B \in \mathcal{P}(A) \mapsto P(B|A) = \dfrac{P(B \cap A)}{P(A)}$ est une mesure de probabilité sur $(A, \mathcal{P}(A))$.
c) Plus généralement, si X est un ensemble fini, comment définit-on une probabilité uniforme sur X ?
d) Soit $X = \mathbb{N}$. Existe-t-il une mesure de probabilité uniforme sur $(\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N})$?

Exercice 4. Soient $(X, \mathcal{A}, \mu)$ un espace mesuré et $f : X \to Y$ une application.
a) On pose $\mathcal{B} := f_*\mathcal{A} = \{B \in Y | f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ la tribu image. On rappelle que $\mathcal{B}$ est une tribu, montrer que

$$\begin{array}{rccc} \nu : & \mathcal{B} & \to & \overline{\mathbb{R}} \\ & B & \mapsto & \mu(f^{-1}(B)). \end{array}$$

définit une mesure sur $(Y, \mathcal{B})$, appelée *mesure image de μ par f* et notée $f_*\mu$.
b) Déterminer la mesure image $\nu = f_*\mu$ dans le cas où $\mu = \delta_a$ est la mesure de Dirac au point $a \in X$.
c) Soit $g : Y \to Z$ une application. Montrer que

$$(g \circ f)_*(\mu) = g_*(f_*(\mu)).$$

Exercice 5. On se place dans $\mathbb{R}$ muni de la tribu de Lebesgue $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ et de la mesure de Lebesgue λ. Les affirmations suivantes sont-elles vraies ou fausses ? Justifier votre réponse.

1. Que peut-on dire de $\lambda(\mathbb{Q})$?
2. Si U est un ouvert non vide de $\mathbb{R}$ alors $\lambda(U) > 0$.
3. Si A est une partie mesurable telle que $\lambda(A) > 0$ alors il existe un ouvert non vide contenu dans A.
4. Si K est un compact de $\mathbb{R}$ alors K est mesurable et $\lambda(K) < \infty$.
5. Si A est une partie mesurable telle que $\lambda(A) < \infty$ alors il existe un compact K tel que $A \subset K$.
6. Si A est une partie de $\mathbb{R}$ telle que $A \subset B$, où $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$, alors $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$.

Exercice 6. On construit l'ensemble tryadique de Cantor de la manière suivante. On part de $\mathcal{C}_1 = \{[0,1]\}$, et on définit par récurrence pour $n \geq 1$

$$\mathcal{C}_{n+1} = \bigcup_{S \text{ segment de } \mathcal{C}_n} \psi(S),$$

où la fonction *découpage tryadique* ψ est définie sur chaque segment $[a, a+l] \subset [0,1]$ par

$$\psi([a, a+l]) = \{[a, a+l/3], [a+2l/3, a+l]\}.$$

On pose ensuite pour $n \geq 1$

$$K_n = \bigcup_{S \in \mathcal{C}_n} S.$$

1. Faire un dessin. Montrer que K_n est une suite décroissante d'ensembles. On appelle

   $$K = \bigcap_n K_n$$

   l'ensemble tryadique de Cantor.
2. Donner la valeur des $\lambda(K_n), n \geq 1$, puis $\lambda(K)$ (pourquoi est-il mesurable ?).
3. Montrer que K est d'intérieur vide.
4. * Dans la procédure précédente, on peut remplacer la procédure de découpage ψ par une autre procédure

   $$\psi_n([a, a+l]) = \{[a, a+\alpha_n l], [a - \alpha_n l, a]\},$$

   avec un facteur $0 < \alpha_n < 1/2$ dépendant de n. Trouver $(\alpha_n)_{n \geq 1}$ qui permette d'obtenir à la fin un ensemble K de mesure non-nulle (mais toujours d'intérieur vide). Cela donne un exemple de mesurable de $\mathbb{R}$ d'intérieur vide et de mesure non-nulle.

Exercice 7. Sur $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$, on apelle mesure invariante par translation une mesure μ qui vérifie pour tout $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}), t \in \mathbb{R}$

$$\mu(A) = \mu(A+t),$$

où

$$A + t = \{x + t : x \in A\}.$$

1. *Montrer que la mesure de Lebesgue λ est invariante par translation. On pourra introduire

   $$\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}) : \lambda(A+t) = \lambda(A) \text{ pour tout t} \in \mathbb{R}\}$$

   et utiliser le théorème de la classe monotone fort.
2. Le but de cette question est de montrer que toute mesure μ invariante par translation s'écrit $\mu = c\lambda$ pour un certain $c \geq 0$.
   (a) Soit $c = \mu([0,1[)$. Montrer que

   $$\mu([0, 1/n[) = \frac{c}{n}.$$

   (b) Montrer que si a, b sont rationnels, alors

   $$\mu([a,b[) = c\lambda([a,b[).$$

   (c) Conclure.