Licence MIA 3ème année, 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Fiche de TD n^{o}2 : Ensembles mesurables, fonctions mesurables

Tribus, ensembles mesurables

Exercice 1. Soit E un ensemble contenant 4 éléments $E = \{a, b, c, d\}$. Déterminer la tribu sur E engendrée par les singletons de E, ainsi que la tribu sur E engendrée par $\{\{a\}, \{b, c\}\}$.

Exercice 2. On considère un ensemble E. On appelle

$$\mathcal{S} = \{\{x\} : x \in \mathbb{R}\}$$

l'ensemble des singletons. Le but de l'exercice est d'expliciter la tribu $\sigma(\mathcal{S})$ générée par les singletons.

1. Montrer que toute partie dénombrable est dans $\sigma(\mathcal{S})$.
2. Montrer que toute partie A telle que A^c est dénombrable est dans $\sigma(\mathcal{S})$.
3. Soit $\mathcal{A} = \{A \subset E : A \text{ dénombrable ou } A^c \text{ denombrable}\}$. Soit $A_n; n \geq 1$ une famille d'ensembles de $\mathcal{A}$. En distinguant le cas où tous les A_n sont dénombrables, montrer que

$$\cup_n A_n \in \mathcal{A}.$$

4. Conclure.

Exercice 3. Soit $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ deux tribus de E. Soit $C \subset E$.

1. La famille $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = \{A \times B : A \in \mathcal{A},\ B \in \mathcal{B}\}$ est-elle une tribu de $E \times E$?
2. Montrer que

$$\sigma(\mathcal{A} \cup \mathcal{B}) = \sigma\{A \cup B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\} = \sigma\{A \cap B : A \in \mathcal{A}, B \in \mathcal{B}\}.$$

Exercice 4. Soit f une application de E dans F. Soit $\mathcal{A}$ une tribu de E. Montrer que $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{B \subset F; f^{-1}(B) \in \mathcal{A}\}$ est une tribu de F. L'ensemble $\{f(A); A \in \mathcal{A}\}$ est-il une tribu de F ?

Exercice 5. Une $partition finie$ d'un ensemble E est une collection finie d'ensembles $\{A_1, \ldots, A_n\}$ telle que

$$E = \bigcup_{i=1}^{n} A_i\,, \quad \text{et} \quad \forall i \neq j,\ A_i \cap A_j = \emptyset\,.$$

Montrer que la tribu engendrée par la partition $\{A_1, \ldots, A_n\}$ est $\left\{ \bigcup_{i \in J} A_i,\ J \subset \{1, \ldots, n\} \right\}$.

Exercice 6. Pour $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq 2^n - 1$, on note

$$I_{k,n} = [k/2^n, (k+1)/2^n[.$$

Soit $\mathcal{A}_n$ la tribu engendrée par les $I_{k,n}$, $0 \leq k \leq 2^n - 1$.

1. Montrer que pour tout $n \geq 1$, $\mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{A}_{n+1}$. A-t-on égalité ?
2. Soit $\mathcal{B}$ la tribu des Boréliens. Montrer que pour tout $n \geq 1, \mathcal{A}_n \subseteq \mathcal{B}$. On pose

$$\mathcal{A}_\infty = \sigma(\cup_{n \geq 1} \mathcal{A}_n).$$

   Montrer que pour tout $0 \leq a < b \leq 1$, $[a, b] \in \mathcal{A}_\infty$. En déduire que $\mathcal{A}_\infty = \mathcal{B}$.

Fonctions mesurables

Exercice 7. Trouver toutes les fonctions mesurables $(E, \mathcal{A}) \to (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ dans les cas suivants :

1. E est quelconque et $\mathcal{A} = \sigma\{\emptyset, E\}$
2. E est quelconque et $\mathcal{A} = \mathcal{P}(E)$
3. $E = \{a, b, c, d\}$ et $\mathcal{A} = \sigma(\{\{a\}, \{b, c\}\})$

Exercice 8. Soit f la fonction défine sur $[0, 3]$ par

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in [0, 1], \\ 1 \text{ si } x \in]1, 3], \end{cases}$$

et g la fonction définie par

$$\begin{cases} g(x) = 2 \text{ si } x \in [0, 1], \\ -1 \text{ si } x \in]1, 2], \\ 4 \text{ si } x \in]2, 3]. \end{cases}$$

Montrer que f est mesurable par rapport à la tribu engendrée par g mais que la réciproque est fausse. (On pourra expliciter les tribus engendrées par chacune de ces fonctions).

Exercice 9. On considère une fonction monotone $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$.

1. Montrer que l'ensemble des points de discontinuité de f est dénombrable.
2. Montrer que la fonction f est borélienne.

Exercice 10. Soit $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions mesurables d'un ensemble $(E, \mathcal{A})$ dans $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$. Montrer que l'ensemble des points x pour lesquels $(f_n(x))_n$ converge est mesurable.
Indication : on rappelle qu'une suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs réelles ou complexes est de Cauchy si $\forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall p, q \geq N, |u_p - u_q| < \varepsilon$. Le résultat fondamental est qu'une suite est de Cauchy si et seulement si elle converge.

Exercice 11. Soit $f : E \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction. On note $f^{-1}(\mathcal{B})$ la tribu *image réciproque* de $\mathcal{B}$: $f^{-1}(\mathcal{B}) = \{f^{-1}(B); B \in \mathcal{B}\}$.

1. On considère une fonction $g : (E, f^{-1}(\mathcal{B}))) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ mesurable. Montrer que si g est une fonction étagée, alors il existe $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction borélienne telle que $g = h \circ f$.

2. En déduire que dans le cas général, si $g : (E, f^{-1}(\mathcal{B}))) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ est mesurable, alors il existe $h : (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ une fonction borélienne telle que $g = h \circ f$.

Exercice 12. Les applications suivantes sont-elles boréliennes ?

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \in \mathbb{Q} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases} \quad , \quad g(x) = \begin{cases} E(x) \text{ si } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z} \\ 0 \text{ sinon} \end{cases} \quad , \quad h(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \mathbf{1}_{[n,n+1[}(x) \; .$$

Exercice 13. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction borélienne. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la *troncature*, f_n, de f de niveau n par

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f_n(x) = \begin{cases} n & \text{si} \quad f(x) > n \\ f(x) & \text{si} \quad |f(x)| \leq n \\ -n & \text{si} \quad f(x) < -n \end{cases} \; .$$

Faire un dessin, puis montrer que f_n est borélienne et que $\forall x \in \mathbb{R} \quad \lim_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$.

Exercice 14. Soit f la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R} \quad f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1 \\ e^{-x} & \text{si} \quad x > 1 \\ \sin x & \text{si} \quad x < 0 \end{cases} \; .$$

Montrer que f est une fonction borélienne.