UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Licence MIA 3ème année, 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Fiche de TD n^{o}1 : quelques activités préparatoires

Rappels sur les images directes et images réciproques d'une application

Exercice 1. Soient f une application d'un ensemble E dans un ensemble F et A, B deux parties de E. On définit *l'image directe* de A par $f(A) = \{f(x), x \in A\}$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$. Déterminer les images directes de $\mathbb{R}, [-\pi/2, \pi/2], [0, \pi/2], [-\pi/2, 0], [\pi/2, \pi]$ et $[0, \pi]$.
2. Montrer que $f(A \cup B) = f(A) \cup f(B)$.
3. Montrer que $f(A \cap B) \subset f(A) \cap f(B)$. L'inclusion inverse est-elle vraie ?
4. Montrer que $f(E) \setminus f(A) \subset f(E \setminus A)$. L'inclusion inverse est-elle vraie ?
5. Montrer que : f injective $\Leftrightarrow \forall A, B \subset E, \;\; f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$
$\Leftrightarrow \forall A \subset E, f(E \setminus A) = f(E) \setminus f(A)$.

Exercice 2. Soient f une application de E dans F et C, D deux parties de F. On définit *l'image réciproque* de C par $f^{-1}(C) = \{x \in E, f(x) \in C\}$.

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin x$. Déterminer les images réciproques de $[-3, -2], [-1, 1]$ et $[0, 1]$. f est-elle bijective ?
2. Montrer que $f^{-1}(C \cup D) = f^{-1}(C) \cup f^{-1}(D)$.
3. Montrer que $f^{-1}(C \cap D) = f^{-1}(C) \cap f^{-1}(D)$.
4. Montrer que $f^{-1}(F \setminus C) = E \setminus f^{-1}(C)$.

Exercice 3. Soit f une application de E dans F.

1. Montrer que : f surjective $\Leftrightarrow \forall C \subset F, \;\; f(f^{-1}(C)) = C$.
2. Montrer que : f injective $\Leftrightarrow \forall A \subset E, \;\; f^{-1}(f(A)) = A$.

Fonctions indicatrices

Exercice 4. On considèe un ensemble E et une partie A de E. La *fonction indicatrice* de A est la fonction $\mathbf{1}_A$ définie sur E par

$$\mathbf{1}_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer $\mathbf{1}_E$ et $\mathbf{1}_\emptyset$.
2. Déterminer les images réciproques de $]1, +\infty[, [0, 1], \mathbb{R}_-$ et $\mathbb{R}_+^*$.

3. Soient A, B, C trois parties de E. Exprimer en fonction des fonctions indicatrices de A, B et C, les fonctions suivantes : $\mathbf{1}_{A^c}$, $\mathbf{1}_{A\cap B}$, $\mathbf{1}_{A\cup B}$, $\mathbf{1}_{A\cup B\cup C}$ et $\mathbf{1}_{A\setminus B}$.
4. Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite de parties de E. Déterminer $\mathbf{1}_{\{\bigcap_{n=1}^N A_n\}}$, $N\in\mathbb{N}$, en fonction des $\mathbf{1}_{A_n}$ puis montrer que

$$\mathbf{1}_{\{\bigcup_{n=1}^N A_n\}} = \sum_{n=1}^N (-1)^{n+1} \left(\sum_{1\leq i_1<\cdots<i_n\leq N} \mathbf{1}_{\{A_{i_1}\cap\cdots\cap A_{i_n}\}} \right).$$

Dénombrabilité

1. Montrer que $\mathbb{N}^*$, $\mathbb{Z}$, puis $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ sont dénombrables.
2. Montrer que toute partie infinie d'un ensemble dénombrable est dénombrable.
3. Montrer que l'union de deux parties dénombrables est dénombrable.
4. Montrer que l'union dénombrable de dénombrables est dénombrable.
5. Montrer que $\mathbb{Q}$ est dénombrable.
6. L'intervalle $[0,1]$ est-il dénombrable ?

Limites supérieure et inférieure de suites

Exercice 5. On considèe une suite u à valeurs réelles et bornée. On note pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} m_n &= \inf\{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots\} = \inf\{u_{n+p}; p\geq 0\} \\ M_n &= \sup\{u_n, u_{n+1}, u_{n+2}, \cdots\} = \sup\{u_{n+p}; p\geq 0\}. \end{aligned}$$

1. Montrer que les suites $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ convergent toutes deux. On note leurs limites respectives $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n$ (*limite inférieure* de u) et $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$ (*limite supérieure* de u). Montrer que $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \limsup\limits_{n\to+\infty} u_n$.
   On étend cette définition lorsque u n'est pas bornée. En particulier, lorsque u n'est pas minorée, on a $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ et lorsque u n'est pas majorée, on a $\limsup\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.
2. Déterminer les limites inférieures et supérieures des suites définies par les égalités suivantes pour tout $n\in\mathbb{N}$: $u_n = (-1)^n$, $v_n = (-1)^n(1+\frac{1}{n})$, $w_{3n} = 1, w_{3n+1} = 0, w_{3n+2} = -1$.
3. Montrer que si $u_n \leq v_n$ pour n assez grand, alors $\liminf\limits_{n\to+\infty} u_n \leq \liminf\limits_{n\to+\infty} v_n$.
4. Montrer que les limites inférieure et supérieure de u sont des valeurs d'adhérences de u.
5. Montrer l'équivalence suivante lorsque l est un réel fixé :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l \Longleftrightarrow \liminf_{n\to+\infty} u_n = \limsup_{n\to+\infty} u_n = l.$$