UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Licence MIA 3ème année, 2012-2013

Intégration et analyse de Fourier

Devoir maison (pour le 14 décembre 2012)

Exercice 1. On considère pour $x \in \mathbb{R}$ la fonction

$$F(x) = \int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} t^x dt.$$

1. Montrer que F est bien définie si $x > -1$.
2. En utilisant le théorème de dérivation, montrer que pour $x > -1$,

$$F(x) = \ln\left(\frac{x+2}{x+1}\right) + C$$

   pour une certaine constante C.
3. Déterminer C en étudiant la limite en $+\infty$. En déduire

$$\int_0^1 \frac{t-1}{\ln(t)} dt.$$

Exercice 2. Soit $K =]0,1[^d$ pour $d \geq 2$. Pour $z = (z_1, \dots, z_d) \in K$ on pose $p(z) = z_1 \dots z_d$, $p_i(z) = p(z)/z_i$ pour $1 \leq i \leq d$. On pose

$$T(z) = \sum_{i=1}^{d} p_i(z),\ z \in K.$$

On s'intéresse à l'intégrale

$$I = \int_K \exp(-T(z)) dz.$$

1. On pose pour $z \in K$

$$\varphi(z) = (p_1(z), \dots, p_d(z)).$$

   Calculer la matrice Jacobienne $J_\varphi(z)$ de φ sur K.
2. Calculer le déterminant de la matrice $d \times d$

$$\alpha_d = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \dots & & & & \\ 1 & 1 & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. En multipliant chaque ligne de $J_\varphi(z)$ et chaque colonne par un nombre judicieux, calculer le Jacobien de φ.
4. Montrer que φ est injective (on pourra commencer par un cas particulier plus simple, comme $d = 3$).
5. Montrer que

$$I \leq \frac{1}{d-1} \left(\int_0^1 u^{-\frac{d-2}{d-1}} \exp(-u) du \right)^d.$$