Université Paris Descartes
U.F.R. Maths/Info.
L3 - MA *2012-2013*

Calcul différentiel
TD 2 : Différentielle

Exercice 1. Soit E un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle$. On note $E_0 = E \setminus \{0\}$.

1. Montrer que l'application
$$f : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\|^2 = \langle x, x \rangle \end{array}$$
est différentiable et calculer sa différentielle.
2. En déduire que l'application
$$g : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$$
est différentiable sur E_0.
3. Montrer que g n'est pas différentiable en 0.
4. Soit $u : E \to E$ une application différentiable sur E. Trouver le domaine de différentiabilité des applications
$$h_1 : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \langle u(x), u(x) \rangle \end{array} \quad \text{et} \quad h_2 : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \|u(x)\| \end{array}$$
et calculer leur différentielle lorsqu'elle existe.

Exercice 2. On considère un espace vectoriel normé $(E, \| \cdot \|)$.

1. Soient $f : E \to \mathbb{R}$ et $g : E \to E$ deux applications différentiables sur E. Montrer que l'application définie pour tout x de E par $u(x) = f(x)g(x)$ est différentiable et calculer sa différentielle en fonction de celles de f et g.
2. Calculer la différentielle de l'application
$$u : \begin{array}{ccc} E \setminus \{0\} & \to & E \setminus \{0\} \\ x & \mapsto & \frac{x}{\|x\|} \end{array}.$$

Exercice 3. (Inégalité d'Euler). Soient E et F deux espaces vectoriels normés. On considère une application $f : E \to F$ différentiable et homogène de degré n, c'est à dire vérifiant la propriété
$$\forall t \in R, \forall\, x \in E, f(tx) = t^n f(x).$$
Montrer que pour tout x de E, $df_x(x) = nf(x)$. Le vérifier pour $f(x) = x^n$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 4. On se place dans l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}([0,1]; \mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_\infty = \sup_{x \in [0,1]} |f(x)|$.

1. Soit ϕ une fonction définie sur $[0,1]$ et bornée. Montrer que
$$g : f \in E \mapsto \int_0^1 \phi(x) f(x) dx \in \mathbb{R}$$
est différentiable et calculer sa différentielle.
2. Soit ϕ une fonction deux fois dérivables et à dérivée seconde bornée. Montrer que
$$g : f \in E \mapsto \int_0^1 \phi(f(x)) dx \in \mathbb{R}$$
est différentiable et calculer sa différentielle. L'application g est-elle de classe C^1 ?

Exercice 5. Soit $(\mathcal{M}, \| \cdot \|)$ l'espace des matrices carrées de taille n que l'on munit d'une norme matricielle.

1. Rappeler ce qu'est la norme triple et montrer que c'est une norme matricielle.

2. Montrer que les applications suivantes sont différentiables et calculer leur différentielle.

$$f_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \to & \mathcal{M} \\ X & \mapsto & X^2 \end{array} \quad \text{et} \quad f_2 : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \to & \mathcal{M} \\ X & \mapsto & X^T X \end{array}.$$

3. Montrer que l'application

$$g : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} & \to & \mathcal{M} \\ X & \mapsto & X^k \end{array}.$$

définie pour $k \in \mathbb{N}^\star$ est différentiable et calculer sa différentielle.

4. Montrer que l'application

$$h : \begin{array}{ccc} \mathcal{M} \times \mathcal{M} & \to & \mathcal{M} \\ (A, B) & \mapsto & AB \end{array}$$

est différentiable et exprimer sa différentielle (on définit $\|(A, B)\| = \|A\| + \|B\|$).

Exercice 6. Soit $E = l_1$ l'espace des suites absolument convergentes muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} |x_n|$. On définit l'application $f : E \times E \to E$ qui à (x, y) associe la suite z de terme général $z_n = x_0 y_n + x_1 y_{n-1} + \cdots + x_n y_0$.

1. Montrer que f est une application bilinéaire continue.
2. En déduire que $g : x \in E \mapsto f(x, x)$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.
3. On considère l'application $\varphi : x \in E \mapsto \|x\|_1$. Soit $h^{(p)}$ définies pour tout p de $\mathbb{N}$ par $h_n^{(p)} = 0$ si $p \neq n$ et $h_n^{(p)} = 1$ si $p = n$. Calculer pour t petit $\varphi(x + th^{(p)})$ pour t positif et négatif.
4. Montrer que si $x_p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, φ n'est pas différentiable en x.

Exercice 7. Soit $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ l'espace vectoriel des matrices carrés à coefficients réels.

1. Soit $H \in E$. Montrer que $\det(H + \lambda I)$ est un polynôme en λ de degré n. Calculer les coefficients de λ^n et λ^{n-1}.
2. Soit $H \in E$ et $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ (espace des matrices inversibles). On pose $\phi(t) = \det(A + tH)$. Montrer que ϕ est dérivable et que $\phi'(0) = \det A \ \mathrm{trace}(A^{-1}H)$.
3. En déduire que la différentielle au point $A \in \mathrm{GL}(n, \mathbb{R})$ de $\det : E \to \mathbb{R}$ vaut $\det(A)\ \mathrm{trace}(A^{-1}H)$.

Exercice 8. Soit $n \geq 1$ et

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R} &\mapsto \mathbb{R} \\ (P, x) &\mapsto P(x). \end{aligned}$$

Calculer les dérivées partielles de φ.

Exercice 9. Soit E l'ensemble des matrices inversibles.

1. Montrer que E est un ouvert.
2. Soit $\varphi(A) = A^{-1}$ sur E. En utilisant l'application $\psi(A) = A$, montrer que φ est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 10. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} \|P(x)\|$. Etudier la différentiabilité de

$$g : \begin{array}{ccc} E & \to & \mathbb{R} \\ P & \mapsto & \displaystyle\int_0^1 \sin(tP(t))dt. \end{array}$$