Université Paris Descartes
U.F.R. Maths/Info.
L3 - MA *2012-2013*

Calcul différentiel
Devoirs maison

Exercice 1. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ muni de la norme $\|P\| = \sup_{x\in[0,1]} |P(x)|$. Etudier la différentiabilité de

$$\begin{aligned} g : \quad E &\to \mathbb{R} \\ P &\mapsto \int_0^1 \sin(tP(t))dt. \end{aligned}$$

Correction. **Methode 1**

Soit $P, Q \in E$.

$$g(P+Q) = \int_0^1 \sin(tP(t) + tQ(t))dt.$$

Le développement de Taylor Lagrange donne pour chaque $t \in [0,1]$,

$$\sin(tP(t) + tQ(t)) = \sin(tP(t)) + tQ(t)\sin'(tP(t)) + \frac{(tQ(t))^2}{2}\sin''(u_t)$$

avec $u_t \in [tP(t), t(P(t)+Q(t))]$. On a donc

$$g(P+Q) = g(P) + L_P(Q) + R(Q)$$

avec

$$L_P(Q) = \int_0^1 tQ(t)\cos(tP(t))dt$$

linéaire continue (dimension finie) et

$$\begin{aligned} \frac{|R(Q)|}{\|Q\|} &= \frac{\left|\int_0^1 (tQ(t))^2 \frac{1}{2}(-\sin(u_t))\right|}{\|Q\|} \leq \frac{1}{2\|Q\|}\int_0^1 t^2 Q(t)^2 |\sin(u_t)| dt \\ &\leq \frac{\|Q\|^2}{\|Q\|}\int_0^1 t^2 dt \leq C\|Q\| \end{aligned}$$

et donc tend vers 0 quand $\|Q\| \to 0$.

□

Methode 2 : Soit $\mathcal{C} = \mathcal{C}^0([0,1], \mathbb{R})$ muni de $\|\cdot\|_\infty$. Soit

$$\begin{aligned} \varphi : &E \to \mathcal{C} \\ &P \mapsto (t \mapsto \sin(tP(t))) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} H : &\mathcal{C} \to \mathbb{R} \\ &f \mapsto \int_0^1 f(t)dt \end{aligned}$$

et donc $g = H \circ \varphi$. Montrons que φ est différentiable : Pour $Q \in E$,

$$\varphi(P+Q) = (t \mapsto \sin(tP(t) + tQ(t))) = (t \mapsto \sin(tP(t)) + tQ(t)\cos(tP(t)) + |tQ(t)|\varepsilon(tQ(t)))$$

avec $\varepsilon(u) \to 0$ quand $u \to 0$. Donc, en posant

$$L_P(Q) = (t \mapsto tQ(t)\cos(tP(t)))$$

linéaire continue (exo), et $R(Q) = (t \mapsto |tQ(t)|\varepsilon(tQ(t)))$, on a

$$\varphi(P+Q) = \varphi(P) + L_P(Q) + R(Q).$$

Le reste vérifie

$$\frac{|R(Q)|}{\|Q\|} \leq \frac{1}{\|Q\|}\sup_{[0,1]}|Q(t)\varepsilon(tQ(t))| \leq \frac{1}{\|Q\|}\|Q\| \sup_{u\in[-\|Q\|,\|Q\|]}|\varepsilon(u)|,$$

et comme ε tend vers 0 en 0 on peut montrer (exercice) que quand $\|Q\| \to 0$,

$$\sup_{[-\|Q\|,\|Q\|]}|\varepsilon(u)| \to 0,$$

ce qui conclut la preuve que φ est différentiable et

$$\varphi'(P).Q = L_P(Q).$$

H est linéaire continue (exo), donc $H'(P).Q = H'(Q)$ et donc g est différentiable et vérifie

$$g'(P).Q = H'(\varphi(P)).(\varphi'(P)) = H(\varphi'(P)) = \int_0^1 L_P(Q)(t)dt = \int_0^1 tQ(t)\cos(tP(t))dt.$$

Bonus : Classe $\mathcal{C}^1$. La fonction g est $\mathcal{C}^1$ si

$$|||g'(P) - g'(R)||| \to 0$$

quand $P \to R$. On a pour $P, Q, R \in E$,

$$|g'(P).Q - g'(R).Q| = \left|\int_0^1 tQ(t)\cos(tP(t)) - tQ(t)\cos(tR(t))dt\right| \leq \int_0^1 |Q(t)||\cos(t(P(t)) - \cos(tR(t))|dt.$$

Maintenant, grace à l'inégalité des accroissements finis,

$$|\cos(tP(t)) - \cos(tR(t))| \leq |t||P(t) - R(t)| \leq \|P - R\|_\infty.$$

Donc finalement

$$|g'(P).Q - g'(R).Q| \leq \|Q\|_\infty \|P - R\|_\infty$$

et donc

$$|||g'(P) - g'(Q)||| = \sup_{Q\neq 0}\frac{|g'(P).Q - g'(R).Q|}{\|Q\|_\infty} \leq \|P - R\|_\infty \to 0$$

quand $P \to R$, et donc g est $\mathcal{C}^1$.

Exercice 2. Soit $E = l_1$ l'espace des suites absolument convergentes muni de la norme $\|x\|_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}}|x_n|$. On définit l'application $f : E \times E \to E$ qui à (x, y) associe la suite z de terme général $z_n = x_0y_n + x_1y_{n-1} + \cdots + x_ny_0$.

1. Montrer que f est une application bilinéaire continue.
2. En déduire que $g : x \in E \mapsto f(x, x)$ est $\mathcal{C}^1$ et calculer sa différentielle.
3. On considère l'application $\varphi : x \in E \mapsto \|x\|_1$. Soit $h^{(p)}$ définies pour tout p de $\mathbb{N}$ par $h_n^{(p)} = 0$ si $p \neq n$ et $h_n^{(p)} = 1$ si $p = n$. Calculer pour t petit $\varphi(x + th^{(p)})$ pour t positif et négatif.

4. Montrer que si $x_p = 0$ pour un certain $p \in \mathbb{N}$, φ n'est pas différentiable en x.

Barème : 1 sur 1,5 ; 2 sur 1 ; 3+4 sur 2,5.
Erreures fréquentes : Division par un vecteur h, une application linéaire=un nombre,

Démonstration. 1. Bilinéaire facile. Pour montrer que c'est continu, c'est un peu plus dur, il faut remarquer que c'est un produit de Cauchy de séries. Il faut écrire ça sous la forme

$$z_n = \sum_{0\leq k,l\leq n \text{ tels que } k+l=n} x_k y_l$$

On remarque au passage que f est symétrique ($f(x,y) = f(y,x)$). D'un autre coté,

$$\|x\|_1\|y\|_1 = (\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|)(\sum_{l=1}^{\infty}|y_l|) = \sum_{k,l=1}^{\infty}|x_k||y_l| = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{0\leq k,l\leq n:k+l=n}|x_k||y_l|$$

On a donc

$$\sum_{n=0}^{\infty}|z_n| \leq \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{0\leq k,l\leq\infty}|x_k||y_l| = \|x\|_1\|y\|_1.$$

C'est-à-dire $\|f(x,y)\| \leq C\|x\|_1\|y\|_1$ avec $C = 1$ et donc f est bilinéaire continue.

2. On a dans ce cas que f est de classe $\mathcal{C}^1$ avec $f'(x,y).(h,u) = f(x,h) + f(u,y)$ pour $x,h,u,y \in E$. On a donc comme d'habitude pour $x,h \in E$,

$$g(x+h) = f(x+h,x+h) = f(x,x) + f'(x,x).(h,h) + o(\|(h,h)\|) = f(x,x) + 2f(x,h) + o(\|h\|)$$

et donc $g'(x).h = 2f(x,h)$.

3.

$$\varphi(x+th^{(p)}) - \varphi(x) = |x_p + t| - |x_p|.$$

4. Si $x_p = 0$, $\varphi(x+th^{(p)}) - \varphi(x) = |t|$. D'un autre coté, si φ est différentiable en x,

$$\varphi(x+th^{(p)}) - \varphi(x) = \varphi'(x).th^{(p)} + o(\|th^{(p)}\|) = t.\varphi'(x).h^{(p)} + o(t).$$

On en arrive à l'expression,

$$|t| = ct + o(|t|)$$

avec la constante $c = \varphi'(x).h^{(p)}$, ce qui implique que la fonction $t \mapsto |t|$ est dérivable en 0 (de dérivée c). Contradiction, donc φ n'est pas différentiable en x.

□

Exercice 3. Soit f_p l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_p(x,y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est continue si et seulement si $p > 0$, différentiable si et seulement si $p > 1$ et de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $p > 2$.

Barème : Sens direct : 2 points (0,5 ; 0,75 et 0,75). Réciproques : 3 pts (0,5 ; 1 et 1,5).
Erreur fréquentes :
- Si pour une fonction g on a $|g(x,y)| \leq h(x,y)|$ avec $h(x,y) \to \infty$ quand $(x,y) \to 0$, cela n'implique rien pour g (et en particulier on n'a pas $g(x,y) \to \infty$ quand $(x,y) \to 0$).

– Ecrire "f est différentiable ssi $\|h\|^{-1}|f(x+h)-f(x)-f'(x).h| \to 0$" est paradoxal car le simple fait d'écrire "$f'(x)$" implique son existence...

Démonstration. Montrons avant tout que $\sin(1/x)$ n'a pas de limite quand $x \to 0$. En effet, on a par exemple $\sin(1/(1/n)) = \sin(n)$ qui n'a pas de limite quand $n \to \infty$.

Continuité Si $p \leq 0$,

$$|f_p(x,0)| = x^p \sin(1/|x|)$$

qui ne tend pas vers 0 quand $x \to 0$, donc $f(x,y)$ ne peut pas tendre vers 0 quand $(x,y) \to 0$. Si $p > 0$ $|f| \leq |x+y|^p \to 0$.

Différentiabilité : On sait que si f est différentiable, alors $f'(x,y).(h,k) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)k$, on doit donc calculer les dérivées partielles en 0 pour avoir la forme de la différentielle si elle existe. On a

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x,0)-f(0,0)}{x} = \lim_{x \to 0} x^{p-1} \sin(\ldots).$$

et de meme en y. Donc f n'admet des dérivées partielles que si $p > 1$, et ne peut donc etre différentiable en $(0,0)$ que si $p > 1$. Si $p > 1$, et si f est différentiable, alors $f'(0,0) = 0$.

Si $p > 1$,

$$\frac{1}{\|(x,y)\|}|f(x,y) - f(0,0) - 0| = \frac{|f(x,y)|}{\|(x,y)\|} \leq \frac{|x+y|^p}{\|(x,y)\|} \leq \frac{(2r)^p}{r} \to 0 \text{ quand } r \to 0$$

aprés passage en coordonnées polaires, donc f est bien différentiable en 0 et de différentielle $f' = 0$.

Classe $\mathcal{C}^1$Soit $p > 1$. Pour $x \neq 0$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f_p}{\partial x} &= p(x+y)^{p-1}\sin(\ldots) + (x+y)^p(-1/2)(2x)(x^2+y^2)^{-3/2}\cos(...)\\ &= (x+y)^{p-1}[p\sin(\ldots) - x(x^2+y^2)^{-3/2}(x+y)\cos(\ldots)]\end{aligned}$$

En passant en coordonnées polaires, on remarque que

$$|\frac{\partial f_p}{\partial x}| \leq r^{p-1}[1 + r.r^{-3}r] \leq 2r^{p-2},$$

et donc la dérivée partielle en x est continue en 0 si $p > 2$. La fonction f étant symmétrique, il en est de meme pour la dérivée partielle en y, donc f a ses dérivées partielles continues sur $\mathbb{R}^2$ si $p > 2$, et elle est alors de classe C^1.

Pour la réciproque,

$$\frac{\partial f_p}{\partial x}(x,0) = o(1) - x^{p-2}\cos(\frac{1}{|x|})$$

qui n'a pas de limite en 0 si $p \leq 2$, donc $\partial f_p/\partial x$ ne peut etre continue en 0 si $p \leq 2$, et donc f' non plus.

On a donc que f' est continue (càd f est de classe $\mathcal{C}^1$) ssi $p > 2$.

□

Exercice 4. Discuter suivant b de l'existence d'un extremum local au point $(0,0)$ pour la fonction f qui à (x,y) de $\mathbb{R}^2$ associe

$$f(x,y) = \frac{b+x^2}{1+x^2+y^2}.$$

Barème : Hessienne : 2 points

Discussion : 3 points (5 cas, 1,5 pour les cas def. positifs ou def. negatifs, 1,5 pour les trois autres cas)

Démonstration. f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$ car c'est une fraction rationnelle et que son dénominateur ne s'annule jamais. Calculons les dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) &= \frac{2x(1+x^2+y^2)-(b+x^2)(2x)}{(1+x^2+y^2)^2} = \frac{2x(1+y^2-b)}{(1+x^2+y^2)^2} \\
\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) &= \frac{-(b+x^2)(2y)}{(1+x^2+y^2)^2}
\end{aligned}$$

et les dérivées secondes en $(0,0)$,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0,0) &= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x,0)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{2(1-b)}{1+x^2} = 2(1-b), \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}{y} = 0, \\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0,0) &= \lim_{y\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(0,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}{y} = -2b.
\end{aligned}$$

La matrice Hessienne est donc

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2(1-b) & 0 \\ 0 & -2b \end{pmatrix}$$

avec $\det(H_f(0,0)) = -4b(1-b)$, $\quad \mathrm{Tr}(H_f(0,0)) = 2(1-2b)$.

La trace est strictement positive ssi $b < 1/2$. Le déterminant est strictement positif ssi $b > 0$ et $1-b<0$, ou si $b<0$ et $1-b>0$, c'est-à-dire finalement si

$$b \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[$$

<u>$H_f(0,0)$ définie positive :</u> Lorsque le déterminant et la trace sont strictement positifs, càd pour

$$b \in]-\infty, 0[.$$

$(0,0)$ est alors un minimum local (strict).

<u>$H_f(0,0)$ définie négative :</u> Lorsque le déterminant est strictement positif et la trace strictement négative, càd pour

$$b \in]1, +\infty[.$$

$(0,0)$ est alors un maximum local strict.

<u>Bilan :</u> $(0,0)$ est un minimum local ssi $b<0$, un maximum local ssi $b>1$.

<u>Bonus :</u> Si $b=0$ ou $b=1$, l'une des valeur propres est nulle et l'autre non. On ne peut alors pas déterminer si $(0,0)$ est un extremum local. On regarde alors à la main. Si $b=0$,

$$f(x,y) = \frac{x^2}{1+x^2+y^2} \geq 0 = f(0,0),$$

et $(0,0)$ est un minimum global, et donc local. Si $b=1$,

$$f(x,y) = \frac{1+x^2}{1+x^2+y^2} \leq \frac{1+x^2+y^2}{1+x^2+y^2} = 1 = f(0,0).$$

$(0,0)$ est un maximum global, et donc local.

Si $b \in]0,1[$, les deux valeurs propres sont non-nulles et de signes distincts, $(0,0)$ est alors un point selle (ni minimum local, ni maximum local). $\square$

Exercice 5. Soient E et F deux Banach, U un ouvert de E contenant 0_E et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathcal{L}(E,F)$. On considère l'application g de U dans F définie par $g(x) = f(x) \cdot x$. Montrer que si $f(0_E)$ est un isomorphisme de E sur F alors g est un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme dans le voisinage de 0_E.

Barème : 2,5 point : Trouver et justifier la différentielle et le caractère $\mathcal{C}^1$. 1,5 points : Prouver que g est localement inversible en 0. 1 points : Bien manipuler les différentes normes

Démonstration. Commencons par étudier la différentiabilité de g. On a pour $x, h \in E$,

$$\begin{aligned} g(x+h) &= f(x+h).(x+h) = (f(x) + f'(x).h + o(h)).(x+h) \\ &= f(x).x + f(x).h + (f'(x).h).x + (f'(x).h).h + o(h). \end{aligned}$$

Pour obtenir cette expression, on a utilisé la différentiabilité de f, et on remarque que comme f est à valeurs dans $\mathcal{L}(E,F)$, $f'(x).h$ est une aplication linéaire, et donc $(f'(x).h).x + (f'(x).h).h$ a du sens. Pour les termes en o, on voit que par exemple $o(h) = \|h\|\varepsilon(h)$ est une application linéaire également et $\|o(h).x\| = \|\|h\|\varepsilon(h).x \leq \|h\|\|x\||||\varepsilon(h)|||$ où $|||\varepsilon(h)||| = \|\varepsilon(h)\|_{\mathcal{L}(E,F)}$ est la norme triple de l'application linéaire $\varepsilon(h)$ (qui tend vers 0 quand h tend vers 0).

Pour montrer la différentiabilité de f, il ne reste plus qu'à montrer que

$$L_x : h \mapsto f(x).h + (f'(x).h).x$$

est linéaire continue et $(f'(x).h).h = o(h)$. Linéarité : exercice. Continuité :

$$\|L_x(h)\| \leq \|f(x).h\| + \|(f'(x).h).x\| \leq |||f(x)|||.\|h\| + |||f'(x).h|||\|x\| \leq |||f(x)|||\|h\| + |||f'(x)|||\|h\|\|x\| \leq C_x\|h\|.$$

La difficulté est de voir que $f'(x)$ est une application linéaire qui à un vecteur h associe une autre application linéaire $f'(x).h$, la quantité

$$|||f(x)||| = \sup_{h\neq 0} \frac{|||f'(x).h|||_{\mathcal{L}(E,F)}}{\|h\|} = \|f(x)\|_{\mathcal{L}(E,\mathcal{L}(E,F))}$$

est la norme triple de cette application.

Pour le reste :

$$\|f'(x).h).h\| \leq |||f'(x).h|||.\|h\| \leq |||f'(x)|||.\|h\|^2 = o(h).$$

Donc g est différentiable de différentielle

$$g'(x).h = f(x).h + (f'(x).h).x.$$

Pour montrer que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme dans le voisinage de 0_E, il faut montrer que $g'(0_E) \in \mathrm{Isom}(E)$. On a $g'(0_E).h = f(0_E).h + (f'(0_E).h).0_E = f(0_E).h$ car $f'(0_E).h$ est une application linéaire. En définitive, $g'(0_E) = f(0_E)$ est bien un isomorphisme car $f(0_E)$ l'est. Comme on est dans un Banach, cela implique par le théorème d'inversion locale que g est un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme dans un voisinage de 0_E.

Autre méthode sans les normes

On pose

$$\begin{aligned} \varphi :&E \to \mathcal{L}(E,F) \times E \\ &x \mapsto (f(x), x) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \psi :&\mathcal{L}(E,F) \times E \to F \\ &(u,x) \mapsto u(x) \end{aligned}$$

et on remarque que $g = \psi \circ \varphi$. De plus, on vérifie facilement que ψ est bilinéaire. φ est de plus $\mathcal{C}^1$ car ses composantes sont continues. Et ψ est continue car

$$\|u(x)\|_F \leq \|u\|_{\mathcal{L}(E,F)}\|x\|_E.$$

Les applications bilinéaires continues sont $\mathcal{C}^1$, donc g est $\mathcal{C}^1$. On a

$$\varphi'(x).h = (f'(x).h, h)$$

(on différentie séparément chaque composante) et en tant qu'aplication bilinéaire

$$\psi'(u,x).(h,k) = \psi(u,k) + \psi(x,h) = u(k) + h(x).$$

On a

$$g'(x).h = \psi'(\varphi(x)).(\varphi'(x).h) = \psi'(f(x),x).(f'(x).h,h) = f(x).h + (f'(x).h).x.$$

En 0_E,

$$g'(0_E).h = f'(0_E).h + (f'(0_E).h).0_E = f'(0_E).h$$

car $f'(0_E.h)$ est une application linéaire, et donc nulle en 0. En définitive, $g'(0_E) = f'(0_E)$ est bien un isomorphisme, et comme g est $\mathcal{C}^1$, on peut appliquer le théorème d'inversion locale en 0_E.

□

Exercice 6. Résoudre

$$(x^2+1)y' = y^2 - 1.$$

Barème : 3,5 points pour la forme générale, 1,5 point pour les conditions initiales

Démonstration. L'équation est équivalente à

$$y' = \frac{y^2-1}{x^2+1} = f(x,y)$$

où f est continue et de classe $\mathcal{C}^1$ en y. Donc, d'après le théorème de Cauchy-Lipschitz, pour tout (x_0, y_0), il existe une unique solution maximale (I, φ) telle que $x_0 \in I$ et $\varphi(x_0) = y_0$.

On remarque d'ores et déjà que les fonctions constantes $y(t) = 1$ et $y(t) = -1$ sont solutions.

On a affaire à une équation à variables séparables. Soit (I, y) un couple solution tel que y n'est pas la solution constante égale à ± 1. Alors $|y(t)| \neq 1$ en tout $t \in I$ (car sinon y vérifie la condition initiale $(t, 1)$ ou $(t, -1)$, qui est aussi vérifiée par la solution constante correspondante, et alors par unicité y est cette solution constante, contradiction). On divise par $y^2 - 1$ et on a

$$\begin{aligned}
\int^X \frac{y'(x)}{y^2-1}dx &= \int^X \frac{dx}{1+x^2} \\
\int^{y(X)} \frac{dy}{y^2-1}dy &= \arctan(X) + C \\
\frac{1}{2}\int^{y(X)} \frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1}dy &= \arctan(X) + C \\
\frac{1}{2}[\ln(\left|\frac{y-1}{y+1}\right|)]^{y(X)} &= \arctan(X) + C \\
\left|\frac{y(X)-1}{y(X)+1}\right| &= C' \exp(2\arctan(X)) \\
y(X)(1 - C'\exp(2\arctan(X))) &= 1 + C'\exp(2\arctan(X))
\end{aligned}$$

pour certaines constantes $C', C \in \mathbb{R}$. Donc toute solution est de la forme

$$y(X) = \frac{1 + C' \exp(2 \arctan(X))}{1 - C' \exp(2 \arctan(X))}$$

pour une certaine constante C'. On voit réciproquement en remontant la chaine que tout couple (I, y) de cette forme est solution.

Soit désormais (x_0, y_0) une condition initiale. On cherche l'unique solution maximale (I, y) telle que $y(x_0) = y_0$. Si $|y_0| = 1$, la solution est la fonction constante 1 ou -1.

Sinon, elle est de la forme ci-dessus, avec

$$y_0 = \frac{1 + C' \exp(2 \arctan(x_0))}{1 - C' \exp(2 \arctan(x_0))}$$

d'on en déduit $C' = C'(x_0, y_0) = \frac{y_0-1}{y_0+1} \exp(-2 \arctan(x_0))$, et

$$y(x) = \frac{1 + \frac{y_0-1}{y_0+1} \exp(2(\arctan(x) - \arctan(x_0)))}{1 - \frac{y_0-1}{y_0+1} \exp(2(\arctan(x_0) - 2 \arctan(x)))}$$

On remarque que si $0 < C' < e^{\pi}$, alors la solution explose (i.e. $\to \pm\infty$) en $x = \tan(-ln(C')/2)$, et il n'y a donc pas globalité de la solution.

2ème méthode : Riccati On remarque que c'est une équation de Riccati, où 1 est solution paritculière. En posant $z = y - 1$, où y est une solution éventuelle, on a

$$(x^2 + 1)z' = (z + 1)^2 - 1 = z^2 + 2z,$$

qui est une équation de Bernoulli. On pose alors $u = 1/z$ sur un intervalle où z ne s'annule pas, et on a

$$\frac{(x^2 + 1)(-u')}{u^2} = \frac{1}{u^2} + \frac{2}{u}$$

d'où

$$\begin{aligned}(x^2 + 1)u' &= -1 - 2u \\ u' &= \frac{-1}{x^2 + 1} - 2\frac{u}{x^2 + 1}\end{aligned}$$

La solution homogène est

$$u_H(x) = A \exp(-\int 2\frac{dx}{x^2 + 1}) = A \exp(-2 \arctan(x)), A \in \mathbb{R}$$

et on voit que $-1/2$ est une solution particulière, d'où u est de la forme

$$u(x) = -\frac{1}{2} + A \exp(-2 \arctan(x))$$

pour une certaine constante $A \in \mathbb{R}$, puis

$$y = z + 1 = \frac{1}{u} + 1 = \frac{1 + A' \exp(-2 \arctan(x))}{-1 + A' \exp(-2 \arctan(x))},$$

et on a bien la meme forme géénrale des solutions. □