Université Paris Descartes	**Calcul différentiel**
U.F.R. Maths/Info.	TD 6 : Extrema libres
L3 - MA *2012-2013*	Inversion Locale

Exercice 1. Etudier les extrema de

$$\begin{aligned} g :& \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \to \frac{x^3}{3} - \frac{y^2}{2} + xy. \end{aligned}$$

Exercice 2. Soit la fonction

$$\begin{aligned} f :& \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R} \\ & (x, y) \to 2(x-y)^2 - x^4 - y^4. \end{aligned}$$

1. Déterminer les points singuliers de f.
2. Montrer que f n'admet pas de minimum global.
3. Montrer que si $|x| > 1$ ou $|y| > 1$, $x^2 + y^2 \leq x^4 + y^4 + 1$.
4. Determiner les extrema, relatifs et globaux, de f.

Exercice 3. Soit a un réel positif. Discuter en fonction de a des points singuliers de l'application f qui à (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe $f(x, y) = x^2y^2 + x^2 + y^2 + 2axy$.

Exercice 4. Examiner l'existence d'un extremum local en $(0, 0)$ de la fonction f qui à (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe $f(x, y) = e^{xy} - xy - 1$.

Exercice 5. Discuter suivant b de l'existence d'un extremum local au point $(0, 0)$ pour la fonction f qui à (x, y) de $\mathbb{R}^2$ associe

$$f(x, y) = \frac{b + x^2}{1 + x^2 + y^2}.$$

Exercice 6. Soit E l'espace des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 1]$ qui vérifient $f(0) = f(1) = 0$, muni de la norme (à vérifier)

$$N(f) = \sqrt{\int_0^1 f'(x)^2 dx} + \sqrt{\int_0^1 f(x)^2 dx}.$$

Soit s une fonction intégrable bornée, et soit la fonctionnelle

$$\varphi(f) = \int_0^1 f'(x)^2 dx + \int_0^1 (f(x) - s(x))^2 dx.$$

définie sur E.

1. Etudier la différentiabilité de φ.
2. Montrer que si f est un point singulier, alors pour tout $h \in E$,
$$\int_0^1 (-f''(x) + f(x) - s(x))h(x)dx = 0.$$
3. On admet que cela implique $-f'' + f - s = 0$. Donner la valeur du (des) point(s) singulier(s) de φ lorsque
$$s(x) = \begin{cases} 0 \text{ si } x \leq 1/2, \\ 1 \text{ si } x > 1/2. \end{cases}$$

Exercice 7. Soit
$$\varphi(x,y) = (xe^{x+y}, xe^{-x}).$$
Donner une condition sur (x,y) pour que l'équation $f(x,y) = (u,v)$ soit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme sur un voisinage de (x,y).

Exercice 8. On définit l'application $f : (x,y,z) \to (x+y, y/x, z/x)$.

1. Etudier la différentiabilité de f.
2. Sur et vers quels ouverts l'application f définit-elle un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ?

Exercice 9. Soit $g : t \to \sqrt{1+t^2}$. On définit l'application $f : (x,y) \to (u,v)$, où
$$u(x,y) = xg(y) + yg(x) \quad \text{et} \quad v(x,y) = (x+g(x))(y+g(y)).$$

1. Etudier la différentiabilité de f.
2. L'application f est-elle $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme ?
3. Déterminer $f(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 10. Soient E l'espace des applications $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ qui s'annulent en 0 muni de la norme $\|f\|_1 = \sup_{t\in[0,1]} \|f'(t)\|$ et F l'espace des applications $\mathcal{C}^0([0,1];\mathbb{R})$ muni de la norme $\|f\|_0 = \sup_{t\in[0,1]} \|f(t)\|$. On pose $\phi : E \to F, f \to f' + f^2$.

1. L'application ϕ est-elle différentiable ?
2. Soit g une application de E. Montrer que l'équation $f' + f^2 = g$ admet une solution dans F lorsque $\|g\|_0$ est assez petite.

Exercice 11. Montrer que l'application qui à (r,θ,ϕ) associe $(r\sin\theta\cos\phi, r\sin\theta\sin\phi, r\cos\theta)$ définit un difféomorphisme de $\mathbb{R}_*^+ \times]-\pi/2, \pi/2[\times]0, 2\pi[$ dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12. Soient E et F deux Banach, U un ouvert de E contenant 0_E et f une application de classe $\mathcal{C}^1$ de U dans $\mathcal{L}(E,F)$. On considère l'application g de U dans F définie par $g(x) = f(x)\cdot x$. Montrer que si $f(0_E)$ est un isomorphisme de E sur F alors g est un $\mathcal{C}^1$-difféormorphisme dans le voisinage de 0_E.

Exercice 13. Montrer que pour tout t, $|t| < 1/\sqrt{2}$, l'équation $\sin(tx) + \cos(tx) = x$ admet une solution unique $x = \phi(t)$ qui est $\mathcal{C}^\infty$. Donner un développement limité à l'ordre de 3 de ϕ dans un voisinage de 0.

Exercice 14. Pour chacune des fonctions suivantes, calculer le gradient et la matrice hessienne aux points $z_0 = (x_0, y_0)$ et écrire la formule de Taylor à l'ordre 3 en z_0.

$$\begin{array}{ll} f(x,y) = x^3 + y^2, & z_0 = (0,0). \\ g(x,y) = x^3y^2(1-x-y), & z_0 = (1/2, 1/3). \\ h(x,y) = \sin(x)\sin(y), & z_0 = (0,0). \end{array}$$