**Université Paris Descartes**
U.F.R. Maths/Info.
**L3 - MA** *2012-2013*

**Calcul différentiel**
TD 5 : Dérivées partielles d'ordre supérieur

**Exercice 1.** Justifier l'existence et calculer les dérivées partielles secondes des fonctions suivantes :

$$f(x,y) = x^m y^n, m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N} \quad \text{et} \quad g(x,y) = \log\sqrt{x^2+2y^2}.$$

**Exercice 2.** Déterminer un développement limité à l'ordre 4 au voisinage de $(0,0)$ de l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ qui à $(x,y)$ associe $f(x,y) = \sin x \sin y$. En déduire les dérivées partielles de $f$ jusqu'à l'ordre 4.

**Exercice 3.** Soit la fonction définie par $f(x,y) = \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2}$, si $(x,y) \neq (0,0)$, et $0$, sinon.

1. Indiquer les relations entre les dérivées partielles d'ordre 2, puis les calculer.
2. A-t-on $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0) = \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$ ? Pourquoi ?

**Exercice 4.**

1. Soit $F(x,y) = g(f_1(x,y), f_2(x,y))$ où $g, f_1, f_2$ sont des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles. Exprimer les dérivées partielles de $F$ en fonctions de celles de $g, f_1, f_2$.
2. Soit $f(x,y)$ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^n$ et $\tilde{f}(r,\theta)$ son expression en coordonnées polaires. Donner les dérivées partielles de $\tilde{f}$ en fonction de celles de $f$.
3. Retrouver le résultat précédent en utilisant le fait que $\tilde{f} = f \circ p$ avec $p(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ et en écrivant le lien entre les matrices jacobiennes de $f, \tilde{f}$ et $p$ (exercice 7 du TD3).
4. Calculer avec cette méthode les dérivées partielles de $f(x,y) = \left(\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2\right)$.

**Exercice 5.** Soit $U$ un ouvert de $\mathbb{R}^n$. Pour toute application $f$ définie de $U$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$, on définit le laplacien de $f$ par

$$\Delta f = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i^2}.$$

On dit que $f$ est harmonique si $\Delta f = 0$.

1. Calculer le laplacien de l'application $f(x_1,x_2,x_3) = \sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}$.
2. Montrer que l'applications suivante est harmonique :

$$f(x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{\sqrt{x_1^2+x_2^2+x_3^2}}$$

3. Soit $r$ la fonction qui à $(x_1, x_2, x_3)$ associe $r(x_1, x_2, x_3) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2}$ et $f$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. On pose $F = f \circ h$. Etablir une relation entre le laplacien de $F$ et les dérivées de $f$. Retrouver le résultat de la question 2.

**Exercice 6.** Soit $f$ une application de $\mathbb{R}^p$ dans $\mathbb{R}$ homogène de degré $n$ admettant des dérivées partielles secondes. Montrer que

$$\sum_{i,j=1}^{p} x_i x_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i x_j}(x) = n(n-1)f(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^p.$$

**Exercice 7.** Soit $f$ et $g$ deux fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2$. On considère l'application $F$ qui à $(x, y)$ associe $F(x, y) = f(x - ay) + g(x + ay)$. Montrer que $a^2 \dfrac{\partial^2 F}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y^2}$.

**Exercice 8.** Soient deux applications $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $g : V \to \mathbb{R}^m$, définies sur un ouvert $U$ de $\mathbb{R}^p$ et un ouvert $V$ de $\mathbb{R}^q$ tel que $f(U) \subset V$. On considère l'application $h = g \circ f$ sur $U$. Montrer que

$$H_h = {}^t\nabla f H_{g(f)} \nabla f + {}^t\nabla g(f) H_f.$$

où $\nabla f$ et $H_f$ sont le gradient et la matrice Hessienne de $f$.

**Exercice 9.** Soit $E$, $F$ et $G$ des espaces vectoriels normés et $f$ une application bilinéaire continue de $E \times F$ dans $G$. Montrer que $f$ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ et calculer ses dérivées partielles successives.

**Exercice 10.** Soit une application $f$ différentiable sur un ouvert connexe $U$ et à valeurs dans un espace vectoriel normé $F$. Soient $a$ et $b$ deux points distincts de $U$. Montrer qu'il existe $\theta$ dans $]0, 1[$ tel que $f(b) - f(a) = df_{a+\theta(b-a)}(b - a)$.

**Exercice 11.** Soient $f$ et $g$ deux applications de classe $\mathcal{C}^n$ définies sur $\mathbb{R}^2$ et à valeurs dans $\mathbb{R}$. Calculer $\dfrac{\partial^n(fg)}{\partial x^k \partial y^{n-k}}$ en fonction des dérivées partielles de $f$ et $g$.