Calcul différentiel
TD 4 : Accroissements finis

Exercice 1. On considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$f(x,y) = (x^2 - y, x^2 + y^2).$$

On pose $g = f \circ f$.

1. Montrer que f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$.
2. Calculer $J_f(x,y)$ la matrice Jacobienne de f, puis calculer $J_g(0,0)$ la matrice Jacobienne de g au point 0.
3. Montrer qu'il existe $r > 0$ tel que, pour tout $(x,y) \in \bar{B}(0,r)$, on ait $\|g'(x,y)\|_{\mathcal{L}(\mathbb{R}^2)} \leq 1/2$.

Exercice 2. Soient E,F deux espaces vectoriels normés, $\mathcal{O}$ un ouvert de E, $f : \mathcal{O} \to F$ une application continue et a un point de $\mathcal{O}$.

Montrer que, si f est différentiable sur $\mathcal{O} \setminus \{a\}$ et $f'(x)$ admet une limite L linéaire continue quand x tend vers a, alors f est différentiable au point a et $f'(a) = L$. (On pourra appliquer le théorème des accroissements finis à l'application $f - L$.) En déduire une autre solution de l'exercice 9 de la feuille 2.

Exercice 3. Soit $\mathcal{M}$ l'espace des matrices carrées d'ordre n muni d'une norme matricielle $\|\cdot\|$, et G le groupe des matrices inversibles.

1. Soit $X \in \mathcal{M}$ telle que $\|X\| < 1$, et pour $N \geq 1$

   $$f_N(X) = \sum_{k=0}^{N} X^k.$$

   Calculer la limite quand $N \to \infty$ de $(I - X)f_N(X)$.
2. En déduire un développement en série entiére de l'application $f : X \mapsto (I-X)^{-1}$. Quelle analogie pouvez-faire avec les fonctions réelles ? L'égalité est-elle toujours vraie pour $\|X\| = 1$? Montrer que pour $t \leq 1$, $\|X\| < 1$, $I + tX$ est inversible et $\det(I + tX) > 0$.
3. On suppose qu'on utilise la norme $\|\cdot\| = n\|\cdot\|_\infty$. Vérifier que c'est une norme matricielle. Montrer que pour $\|H\| < 1$, $0 < t \leq 1$,

   $$|Tr(f(tH)H)| \leq \frac{\|H\|}{1 - t\|H\|}.$$

4. On pose $\varphi(t) = \det(I+tH)-1$. En appliquant le lemme de Gronwall, donner une approximation de $\det(I+H)$ en fonction de $\|H\|$. (On pourra utiliser l'expression de la différentielle du déterminant vue à la fiche 2)

   Rappel : Le lemme de Gronwall stipule que pour φ, ψ continues et positives sur $[0,1]$, si il existe $K, L \geq 0$ tels que

   $$\varphi(t) \leq K + L\int_0^t \varphi(s)\psi(s)ds,$$

   alors

   $$\varphi(t) \leq K\exp(L\int_0^t \psi(s)ds).$$