Université Paris Descartes
U.F.R. Maths/Info.
L3 - MA *2012-2013*

Calcul différentiel
TD 3 : Dérivées partielles

Exercice 1. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \frac{x^3y^3}{x^2+y^2}, \text{si } \; x^2+y^2 \neq 0, \;\; f(0,0) = 0, \text{sinon.}$$

1. Lorsque cela est possible, calculer les dérivées partielles de f.
2. Etudier la différentiabilité de f, et son caractère $\mathcal{C}^1$.
3. Mêmes questions avec

$$g(x,y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, \text{si } \; x^2+y^2 \neq 0, \;\; g(0,0) = 0, \text{sinon.}$$

$$h(x,y) = \frac{x^3-y^3}{x^2+y^2}, \text{si } \; x^2+y^2 \neq 0, \;\; h(0,0) = 0, \text{sinon.}$$

Exercice 2. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ différentiable en $(0,0)$. On définit

$$\begin{array}{rccc} F: & \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ & (x,y,z) & \to & (f(y,z), f(z,x), f(x,y)) \end{array}$$

Montrer que F est différentiable en $(0,0,0)$. Exprimer la matrice jacobienne de F en $(0,0,0)$ et son jacobien.

Exercice 3. On considère la fonction f définie par

$$f(x,y) = (x^2+y^2)\sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), \text{si } \; x^2+y^2 \neq 0, \;\; f(0,0) = 0, \;\text{ sinon.}$$

Etudier la continuité de f et calculer les dérivées partielles d'ordre 1. Etudier la continuité des dérivées partielles en $(0,0)$. L'application f est-elle différentiable ?

Exercice 4. Soit f_p l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_p(x,y) = \begin{cases} (x+y)^p \sin(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}), & \text{si } \; (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & \text{si } \; (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

Montrer que f est continue si et seulement si $p > 0$, différentiable si et seulement si $p > 1$ et de classe $\mathcal{C}^1$ si et seulement si $p > 2$.

Exercice 5. On considère les applications

$$\begin{array}{rccc} f: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \to & (x^2+y^2, x^2+y^2) \end{array} \qquad \begin{array}{rccc} g: & \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ & (u,v) & \to & \begin{cases} 0, & \text{si } uv = 0 \\ 1, & \text{si } uv \neq 0 \end{cases} \end{array}$$

1. Etablir le domaine d'existence des dérivées partielles d'ordre 1 de g.
2. Etudier la différentiabilité de g.
3. Etudier la dérivabilité partielle de $g \circ f$.

Exercice 6. Soit f une application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(\theta,\phi) = (a\cos\theta\cos\phi, b\cos\theta\sin\phi, c\sin\theta),$$

où a, b et c sont fixés dans $\mathbb{R}_+^*$. Calculer la matrice jacobienne de f en $(\pi/4, \pi/4)$. Calculer le rang de $f'(\pi/4,\pi/4)$ et donner une base de $\mathrm{Im}(f'(\pi/4,\pi/4))$.

Exercice 7. Soient deux applications différentiables $f : U \to \mathbb{R}^q$ et $g : V \to \mathbb{R}^m$, définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et un ouvert V de $\mathbb{R}^q$ tel que $f(U) \subset V$. On considère l'application $h = g \circ f$ sur U. Montrer que

$$\forall a \in U,\ J_h(a) = J_g(f(a))\, J_f(a).$$

et exprimer les dérivées partielles de h en fonction de celles de f et g.

Exercice 8. Soit f une fonction définie sur $\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = (\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, x^2+y^2).$$

On note $\tilde{f}$ la fonction f exprimée en coordonnées polaires.

1. Calculer la jacobienne J_f de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, ainsi que son jacobien $|J_f|$.
2. Exprimer la fonction $\tilde{f}$. Déterminer la matrice jacobienne $J_{\tilde{f}}$ de $\tilde{f}$, ainsi que son jacobien $|J_{\tilde{f}}|$.
3. Vérifier la relation entre J_f et $J_{\tilde{f}}$, ainsi que celle entre $|J_f|$ et $|J_{\tilde{f}}|$.

Exercice 9. Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ l'espace vectoriel des pôlynomes de degré inférieur à n muni de la base $(X^k)_{k=0}^n$. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$. Calculer les différentielles partielles de l'application

$$\begin{array}{rccl} \phi : & E & \to & \mathbb{R} \\ & P & \to & \int_0^1 f(t, P(t))dt. \end{array}$$

ϕ est-elle différentiable ?