Calcul différentiel
TD 1 : Espaces vectoriels normés

Exercice 1. Démontrer l'équivalence des normes suivantes de $\mathbb{R}^n$:

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}, \quad \|x\|_\infty = \sup_{i=1}^n |x_i|, \quad \|x\|_1 = \sum_{i=1}^n |x_i|.$$

Exercice 2. On considère l'ensemble E formé par les fonctions f de $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ qui vérifient $f(0) = 0$. Pour tout f de E, on pose :

$$N_1(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|, \quad N_2(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x) + f'(x)|.$$

1. Montrer que E est un espace vectoriel.
2. Montrer que N_1 et N_2 sont des normes de E.
3. Soit f dans E. On considère la fonction $g(x) = e^x f(x)$. Pour tout x, montrer que $|g'(x)| \leq eN_2(f)$ et que $|g(x)| \leq eN_2(f)$.
4. En déduire que N_1 et N_2 sont équivalentes.

Exercice 3. Soit $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ muni de la norme $\|x\| = \int_0^1 |x(t)|dt$.

1. Soit ϕ définie et bornée sur $[0,1]$. Montrer que l'application $f : x \to \int_0^1 \phi(t)x(t)dt$ est une forme linéaire continue sur E.
2. Montrer qu'avec $\phi(t) = t^{-\frac{1}{2}}$ l'application f n'est pas continue. On pourra considérer les fonctions $x_n(t) = 2n^2(\frac{1}{n} - t)$ sur $[0, 1/n]$ et 0 ailleurs.
3. Montrer que la norme $\|x\|_\infty = \sup_{t\in[0,1]} |x(t)|$ n'est pas équivalente à la norme $\|\cdot\|$. On pourra utiliser les fonctions $x_n(t) = -nt + 1$ sur $[0, 1/n]$ et 0 ailleurs.

Exercice 4. Soit l'espace $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ que l'on munit de la norme $N(f) = \sup_{[0,1]} |f(x)| + \sup_{[0,1]} |f'(x)|$.

1. Soit l'application linéaire ϕ de $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ qui à f associe f'. Montrer que ϕ est continue. Calculer sa norme en utilisant la fonction $f_n(x) = \frac{1}{n\pi}\sin(n\pi x)$.
2. Pour $f \in \mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$, on pose $\psi f(x) = \int_0^x f(t)dt$. Montrer que ψ est une application linéaire continue de $\mathcal{C}([0,1];\mathbb{R})$ dans $\mathcal{C}^1([0,1];\mathbb{R})$. Calculer sa norme.

Exercice 5. Soient E_1, E_2 et E_3 trois espaces vectoriels normés. On note $F = \mathcal{L}(E_1, E_2)$, $G = \mathcal{L}(E_2, E_3)$, $H = \mathcal{L}(E_1, E_3)$. Montrer que l'application ϕ de $F \times G$ dans H qui à (f, g) associe $g \circ f$ est bilinéaire continue.

Exercice 6. On munit l'espace $E = \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$ de la norme $f \mapsto \|f\|_\infty = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|$. L'application

$$\begin{array}{rccl} \Phi : & E^3 & \to & \mathbb{R}, \\ & (f,g,h) & \mapsto & \int_0^1 f(x)\,g(x)\,h(x)\,dx, \end{array}$$

est-elle continue ?

Exercice 7. On note l_∞ l'espace des suites réélles bornées normé par $\|\cdot\|_\infty$.

1. Soit $a = (a_n)$ une suité réélle. Former une condition nécessaire et suffisante sur la suite a pour que l'application
$$N_a : x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n|x_n|$$
définisse une norme sur l_∞.
2. Montrer que dans ce cas N_a et $\|\cdot\|_\infty$ ne sont pas equivalentes.

Exercice 8. Soit $E = \mathbb{R}[X]$. Pour $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, on pose

$$\|P\|_1 = \sum_{k=0}^{n} |a_k|, \quad \|P\|_\infty = \max\{|a_0|, \cdots, |a_n|\} \ \text{ et } \ \|P\|_\star = \max_{t\in[0,1]} |P(t)|.$$

1. Démontrer que ce sont des normes.
2. Montrer qu'elles ne sont pas deux à deux équivalentes. On considérera les polynomes $P_n(t) = (t-1)^n$ et $Q_n(t) = 1 + t + \cdots + t^n$.
3. Ces normes sont-elles équivalentes dans $E_n = \mathbb{R}_n[X]$?
4. Soit $\phi : E \to \mathbb{R}$, l'application qui à $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ associe $\phi(P) = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$. Etudier la continuité de ϕ pour chacune des normes.
5. Etudier la continuité de la restriction de ϕ à E_n.

Exercice 9. Soit $E = \mathcal{M}$ l'espace vectoriel formé par les matrices de taille $m \times n$.On définit

$$\|A\|_0 = \sqrt{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|^2}.$$

1. Montrer qu'il s'agit bien d'une norme et que $\|A\|_0^2 = \mathrm{tr}(A^t A)$.
2. Montrer que si A et B sont deux matrices de formats respectifs $m \times n$ et $n \times p$, alors :
$$\|AB\|_0 \leq \|A\|_0 \|B\|_0.$$
A la continuité de quelle application cela correspond-il ?
3. On note $|||\cdot|||_2$ la norme matricielle induite par la norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$. Montrer que
$$\forall\, A \in E, \ \ |||A|||_2 \leq \|A\|_0$$

Exercice 10. On considère l'espace vectoriel E des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 2\pi]$ qui vérifient : $\forall\, f \in E, f(0) = f'(0) = 0$. On pose : $\forall\, f \in E$,

$$\begin{aligned} N_1(f) &= \sup\nolimits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)| + \sup\nolimits_{x\in[0,2\pi]} |f''(x)|, \\ N_2(f) &= \sup\nolimits_{x\in[0,2\pi]} |f(x) + f''(x)|, \\ N(f) &= \sup\nolimits_{x\in[0,2\pi]} |f(x)|. \end{aligned}$$

1. Montrer que N_1, N_2 et N sont des normes de E.
2. On pose $f(x) = \lambda(x)\cos x + \beta(x)\sin x$ avec λ et μ de classe $\mathcal{C}^2$ sur $[0, 2\pi]$.
   (a) Exprimer λ et μ ainsi que leurs dérivées λ' et μ' en fonction de f et de ses dérivées.
   (b) Trouver une majoration de λ et μ par $N_2(f)$.
   (c) En déduire que N_1 et N_2 sont équivalentes.
3. En considérant la fonction $f_n(x) = (\frac{x}{2\pi})^n$, montrer que N et N_1 ne sont pas équivalentes.

Exercice 11. On considère l'espace vectoriel $E = \mathcal{C}^2([0,1]; \mathbb{R})$. Pour tout f de E, on pose

$$N_\infty(f) = \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|, N'_\infty(f) = |f(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f'(x)|, N''_\infty(f) = |f(0)| + |f'(0)| + \sup_{x\in[0,1]} |f''(x)|.$$

1. Montrer que N_∞, N'_∞ et N''_∞ sont des normes de E.
2. Montrer que ces normes ne sont pas deux à deux équivalentes.