INÉGALITÉS DE HOEFFDING ET THÉORÈME LIMITE CENTRAL POUR DES FONCTIONS PEU RÉGULIÈRES DE CHAÎNES DE MARKOV NON IRRÉDUCTIBLES

J. DEDECKER[1]

Résumé. Pour une classe de chaînes de Markov incluant de nombreuses chaînes non irréductibles, on donne des conditions sur le module de continuité de f pour que les sommes $S_n(f) = f(X_1)+\cdots+f(X_n)$ satisfassent le théorème limite central ainsi qu'une inégalité exponentielle de type Hoeffding.

Classification MSC 2000. 60F05, 60J10

Mots clés. Chaînes de Markov, couplage, théorème limite central, inégalités exponentielles.

1. Introduction

On s'intéresse dans cet article à des chaînes de Markov strictement stationnaires $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ (et plus généralement à des processus strictement stationnaires) qui ne sont pas mélangeantes au sens de Rosenblatt (1956). Parmi ces chaînes, une des plus connues et la chaîne de transition

$$(Kf)(x) = \frac{1}{2}\Big(f\Big(\frac{x}{2}\Big) + f\Big(\frac{x+1}{2}\Big)\Big) \tag{1.1}$$

dont l'unique mesure invariante μ est la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$. Kac (1946) montra que si f est soit une fonction à variation bornée, soit une fonction Hölderienne sur $[0,1]$, alors $n^{-1/2}S_n(f-\mu(f)) = n^{-1/2}\sum_{i=1}^n (f(X_i) - \mu(f))$ converge en loi vers une gaussienne (on dira alors que $S_n(f)$ satisfait le théorème limite central (TLC)). Ibragimov (1960) étendit ce résultat aux fonctions f telles que

$$f \in \mathbb{L}^2(\mu) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{w_2(f,t)}{t} dt < \infty\,, \tag{1.2}$$

où $w_2(f,t)$ est le module de continuité de f dans $\mathbb{L}^2([0,1], dt)$. Enfin, Maxwell et Woodroofe (2000) appliquèrent un résultat général à la chaîne de transition (1.1), et obtinrent le TLC sous une condition qui peut s'écrire

$$f \in \mathbb{L}^2(\mu) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{w_2(f,t)}{t\sqrt{|\ln t|}} dt < \infty\,. \tag{1.3}$$

Notons $w(f,t) = \sup_{|x-y|\le t} |f(x) - f(y)|$ le module de continuité de f. La condition (1.3) (qui ne requière pas la continuité de f) est vérifiée en particulier pour les fonctions continues dès que

$$f \in \mathbb{L}^2(\mu) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{w(f,t)}{t\sqrt{|\ln t|}} dt < \infty\,. \tag{1.4}$$

[1] Université Paris 6, Laboratoire de Statistique Théorique et Appliquée.

Dans cet article, on présente une large classe de processus strictement stationnaires (de loi marginale invariante μ), pour laquelle le TLC a lieu dès que

$$f \in \mathbb{L}^2(\mu) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{c_w(f,t)}{t\sqrt{|\ln t|}} dt < \infty\,, \tag{1.5}$$

où $t \mapsto c_w(f,t)$ est le plus petit majorant concave de $t \mapsto w(f,t)$. On présentera également une classe plus restreinte pour laquelle $\mathbb{P}(|S_n(f) - \mu(f)| > t) \leq 4\sqrt{e}\exp(-t^2/Cn)$ (on dira alors que l'inégalité de Hoeffding a lieu) dès que

$$f \in \mathbb{L}^\infty(\mu) \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{c_w(f,t)}{t\sqrt{|\ln t|}} dt < \infty\,. \tag{1.6}$$

On notera que la condition portant sur c_w est satisfaite dès que $w(f,t) \leq D|\ln t|^{-\gamma}$ au voisinage de 0, pour $D > 0$ et $\gamma > 1/2$. Elle est donc vérifiée par toutes les fonctions Hölderiennes, mais aussi par des fonctions très peu régulières.

On montre ces résultats en combinant une propriété de couplage avec des résultats généraux: un théorème limite central établi dans Dedecker et Merlevède (2002) et une inégalité de Hoeffding due à Peligrad, Utev et Wu (2007). L'utilisation du couplage des variables aléatoires pour établir des bornes exponentielles remonte à l'article de Bosq (1993). On en donne un autre exemple d'application ici.

2. τ-dépendance et couplage

Soit $(\mathcal{X}, d)$ un espace polonais. Pour une fonction f lipshitzienne de $(\mathcal{X}, d)$ dans $\mathbb{R}$ on note

$$\mathrm{Lip}(f) = \sup_{x,y\in\mathcal{X}} \frac{|f(x) - f(y)|}{d(x,y)}\,,$$

et on note Λ_1 l'ensemble des fonctions f telles que $\mathrm{Lip}(f) \leq 1$. Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé, $\mathcal{M}$ une sous-tribu de $\mathcal{A}$ et X une variable aléatoire à valeur dans $\mathcal{X}$. Soit $\mathbb{P}_{X|\mathcal{M}}$ la loi de X sachant $\mathcal{M}$ et $\mathbb{P}_X$ la loi de X.

Soit $p \in [1, \infty]$ tel que $\|d(x, X)\|_p < \infty$ pour un $x \in \mathcal{X}$. Comme dans Dedecker et Merlevède (2006), on définit le coefficient de τ_p-dépendence entre $\mathcal{M}$ et X par

$$\tau_p(\mathcal{M}, X) = \Big\| \sup_{f\in\Lambda_1} \big|\mathbb{P}_{X|\mathcal{M}}(f) - \mathbb{P}_X(f)\big| \Big\|_p\,. \tag{2.1}$$

En procédant comme dans Rüschendorf (1985) (voir aussi la section 7.1 dans Dedecker et Prieur (2005)), on montre que si $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ est assez riche, il existe un couplage X^* de même loi que X et indépendant de $\mathcal{M}$ tel que

$$\tau_p(\mathcal{M}, X) = \|\mathbb{E}(d(X, X^*)|\mathcal{M})\|_p\,. \tag{2.2}$$

Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}$, et $\mathcal{M}_0$ la tribu du passé $\mathcal{M}_0 = \sigma(X_i, i \leq 0)$. On définit

$$\tau_p(n) = \tau_p(\mathcal{M}_0, X_n)\,.$$

On dit que la suite stationnaire $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ appartient à la classe $G(\tau_p)$ si $\|d(x, X_1)\|_p < \infty$ pour un $x \in \mathcal{X}$, et si les coefficients $\tau_p(n)$ décroissent géométriquement, c'est à dire si $\tau_p(n) \leq K\rho^n$ pour $K > 0$ et $\rho \in]0, 1[$.

3. Résultats

Soit f une fonction continue de $(\mathcal{X}, d)$ dans $\mathbb{R}$. On définit son module de continuité

$$w(f,t) = \sup_{d(x,y)\leq t} |f(x) - f(y)| ,$$

et on note $c_w(f,.)$ le plus petit majorant concave de la fonction $t \mapsto w(f,t)$.

Le premier résultat est un principe d'invariance faible.

Théorème 3.1. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite strictement stationnaire et ergodique de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}$ et de loi invariante μ. Si*

$$f \in \mathbb{L}^2(\mu) \quad et \quad \sum_{k>0} \frac{c_w(f, \tau_2(k))}{\sqrt{k}} < \infty , \tag{3.1}$$

alors $\{n^{-1/2} S_{[nt]}(f - \mu(f)), t \in [0,1]\}$ converge en loi dans l'espace de Skorohod $D([0,1])$ vers $\sigma^2(f)W$, où W est un mouvement Brownien standard, et

$$\sigma^2(f) = \mathrm{Var}(f(X_0)) + 2\sum_{k>0} \mathrm{Cov}(f(X_0), f(X_k)) .$$

En particulier, si $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ appartient à $G(\tau_2)$ et si f vérifie la condition (1.5), alors (3.1) a lieu.

Le second résultat est une inégalité de Hoeffding.

Théorème 3.2. *Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite strictement stationnaire de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{X}$ et de loi invariante μ. Pour toute fonction continue f appartenant à $\mathbb{L}^\infty(\mu)$ et tout $t > 0$, on a la borne*

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k(f - \mu(f))| > t\Big) \leq 4\sqrt{e} \exp\Big(-\frac{t^2}{C_n n}\Big) , \tag{3.2}$$

avec

$$C_n = 2\Big(\|f(X_1) - \mu(f)\|_\infty + 240 \sum_{k=1}^{n} \frac{c_w(f, \tau_\infty(k))}{\sqrt{k}}\Big)^2 .$$

En particulier, si $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ appartient à $G(\tau_\infty)$ et si f vérifie la condition (1.6), alors

$$\sup_{n\geq 1} C_n = C < \infty, \quad et\ donc \quad \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k(f - \mu(f))| > t\Big) \leq 4\sqrt{e} \exp\Big(-\frac{t^2}{Cn}\Big) . \tag{3.3}$$

Remarque 3.1. *En partant du corollaire 1 dans Peligrad, Utev et Wu (2007), on peut également montrer que, pour toute fonction continue f appartenant à $\mathbb{L}^p(\mu)$,*

$$\Big\| \max_{1\leq k\leq n} |S_k(f - \mu(f))| \Big\|_p \leq C_p^{1/p} \sqrt{n} \Big(\|f(X_1) - \mu(f)\|_p + 240 \sum_{k=1}^{n} \frac{c_w(f, \tau_p(k))}{\sqrt{k}}\Big) .$$

Remarque 3.2. *Si (3.3) a lieu, alors, pour tout $\epsilon > 0$,*

$$\sum_{n>1} \frac{1}{n} \mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k(f - \mu(f))| > \sqrt{(C+\epsilon) n \ln\ln n}\Big) < \infty .$$

On en déduit la borne suivante:

$$\textit{presque sûrement} \quad \limsup_{n\to\infty} \frac{|S_n(f - \mu(f))|}{\sqrt{Cn \ln\ln n}} \leq 1 .$$

4. Quelques exemples

On trouvera de nombreux exemples pour lesquels on peut calculer des bornes pour les coefficients $\tau_p(n)$ dans l'article de Dedecker et Merlevède (2006). Nous donnons ici quelques exemples de suites satisfaisant $G(\tau_2)$ ou $G(\tau_\infty)$.

(1) Soit $(\varepsilon_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées (iid), à valeurs dans un espace de Banach $(\mathbb{B}, |\cdot|_{\mathbb{B}})$, et telles que $\mathbb{E}(|\varepsilon_0|^2_{\mathbb{B}}) < \infty$. Soit $(A_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une suite d'opérateurs linéaires bornés de $\mathbb{B}$ dans $\mathbb{B}$ telle que $|A_i| = \sup_{|x|_{\mathbb{B}}=1} |A_i(x)|_{\mathbb{B}} = O(\rho^i)$ pour un ρ dans $]0,1[$. Alors la suite définie par $X_i = \sum_{k\geq 0} A_k\varepsilon_{i-k}$ appartient à $G(\tau_2)$. Si de plus $|\varepsilon_0|_{\mathbb{B}}$ est bornée, alors $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ appartient à $G(\tau_\infty)$.

(2) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une chaîne de Markov strictement stationnaire à valeurs dans $(\mathcal{X}, d)$, de noyau de transition K et de mesure invariante μ. On dit que la chaîne est lipschitz-contractante si il existe $\kappa > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tels que

$$\mathrm{Lip}(K^n(f)) \leq \kappa\rho^n \mathrm{Lip}(f)\,. \tag{4.1}$$

Si $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est lipschitz-contractante et si $\|d(x, X_1)\|_2 < \infty$ (resp. $\|d(x, X_1)\|_\infty < \infty$) pour un $x \in \mathcal{X}$, alors $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ appartient à $G(\tau_2)$ (resp. $G(\tau_\infty)$).

Un exemple simple de chaîne lipshitz-contractante est la chaîne $X_{n+1} = F(X_n, \varepsilon_{n+1})$, où $(\varepsilon_i)_{i>0}$ est une suite de variables aléatoires iid indépendante de X_0, et F est telle que

$$\|d(F(x,\varepsilon_1), F(y,\varepsilon_1))\|_1 \leq \rho d(x,y) \tag{4.2}$$

pour un ρ dans $]0,1[$ (dans ce cas $\kappa = 1$). Lorsque $(\mathcal{X}, d) = (\mathbb{B}, |\cdot|_{\mathbb{B}})$ est un espace de Banach, (4.2) est vérifiée pour les processus auto-régressifs $X_{n+1} = g(X_n) + \varepsilon_{n+1}$ où g est telle que $|g(x) - g(y)|_{\mathbb{B}} \leq \rho|x - y|_{\mathbb{B}}$.

(3) Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ une chaîne de Markov strictement stationnaire à valeurs dans $[0,1]$, de noyau de transition K et de mesure invariante μ. On dit que la chaîne est VB-contractante si il existe $\kappa > 0$ et $\rho \in]0,1[$ tels que

$$\|dK^n(f)\| \leq \kappa\rho^n\|df\| \tag{4.3}$$

où pour toute fonction f à variation bornée, $\|df\|$ est la norme en variation de la mesure df. Si $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est VB-contractante, alors $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ appartient à $G(\tau_\infty)$.

On va maintenant donner le lien entre les transformations de $[0,1]$ et les chaînes VB-contractantes. Soit T une transformation de $[0,1]$ dans lui même, préservant la probabilité μ sur $[0,1]$. On définit l'opérateur de Perron-Frobenius K de $\mathbb{L}^2([0,1],\mu)$ dans $\mathbb{L}^2([0,1],\mu)$ *via* l'égalité

$$\int_0^1 (Kh)(x)f(x)\mu(dx) = \int_0^1 h(x)(f\circ T)(x)\mu(dx)\,. \tag{4.4}$$

La transformation T est dite VB-contractante si son opérateur de Perron-Frobenius l'est, c'est à dire s'il vérifie (4.3). En appliquant le Lemme XI.3 dans Hennion et Hervé (2001), on obtient que sur l'espace probabilisé $([0,1],\mu)$, le n-uplet $(T, T^2, \ldots, T^n)$ à même loi que $(X_n, X_{n-1}, \ldots, X_1)$ où $(X_i)_{i\geq 0}$ est la chaîne de Markov de transition K et de mesure invariante μ.

Comme conséquence du théorème (3.1) on a que, si T est VB-contractante et si f vérifie (1.6), alors

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}(f\circ T^k-\mu(f)) \quad \text{converge en loi vers } \mathcal{N}(0,\sigma^2(f)). \tag{4.5}$$

En fait on peut également en déduire que $W_n(f)=\{n^{-1/2}\sum_{k=1}^{[nt]}(f\circ T^k-\mu(f)), t\in[0,1]\}$ converge en loi dans $D([0,1])$ vers $\sigma^2(f)W$. Pour le voir, il suffit de constater d'abord que, puisque $(T,T^2,\dots,T^n)$ à même loi que $(X_n,X_{n-1},\dots,X_1)$, le processus

$$W_n'(f)=\Big\{\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{[nt]}(f\circ T^{n-k+1}-\mu(f))+\frac{nt-[nt]}{\sqrt{n}}(f\circ T^{n-[nt]}-\mu(f)), t\in[0,1]\Big\}$$

converge en loi dans $C([0,1],\|\cdot\|_\infty)$ vers $\sigma^2(f)W$, et donc que $W_n'(f,1)-W_n'(f)$ converge en loi dans $C([0,1],\|\cdot\|_\infty)$ vers $\sigma^2(f)(W(1)-W)$. Par conséquent $\{W_n'(f,1)-W_n'(f,1-t), t\in[0,1]\}$ converge en loi dans $C([0,1],\|\cdot\|_\infty)$ vers $\{\sigma^2(f)(W(1)-W(1-t)), t\in[0,1]\}$ qui a même distribution que $\sigma^2(f)W$. Or $\{W_n'(f,1)-W_n'(f,1-t), t\in[0,1]\}$ est égal au processus

$$\Big\{W_n(f,t)+\frac{nt-[nt]}{\sqrt{n}}(f\circ T^{[nt]+1}-\mu(f)), t\in[0,1]\Big\},$$

qui par conséquent converge en loi dans $C([0,1],\|\cdot\|_\infty)$ vers $\sigma^2(f)W$. Le résultat en découle facilement.

Comme conséquence du théorème (3.2), on a que, si T est VB-contractante et si f vérifie (1.6), alors pour tout $t>0$,

$$\mu\Big(\Big|\sum_{i=1}^{n}(f\circ T^i-\mu(f))\Big|>t\Big)\le 4\sqrt{e}\exp\Big(-\frac{t^2}{Cn}\Big), \quad \text{et} \tag{4.6}$$

$$\mu\Big(\sup_{1\le k\le n}\Big|\sum_{i=1}^{k}(f\circ T^i-\mu(f))\Big|>2t\Big)\le 4\sqrt{e}\exp\Big(-\frac{t^2}{Cn}\Big). \tag{4.7}$$

Donnons à présent une classe de transformations VB-contractantes. On dit que T est uniformément dilatante si elle appartient à la classe $\mathcal{C}$ définie dans Broise (1996), Section 2.1 page 11. Rappelons que si T est uniformément dilatante, alors il existe une probabilité T-invariante μ sur $[0,1]$, dont la densité g_μ par rapport à la mesure de Lebesgue est une fonction à variation bornée. Supposons à présent que

(a) T is uniformément dilatante.
(b) La mesure invariante μ est unique et (T,μ) est mélangeant au sens de la théorie ergodique.
(c) $\dfrac{1}{g_\mu}\mathbf{1}_{g_\mu>0}$ est une fonction à variation bornée.

En partant de la proposition 4.11 dans Broise (1996), on peut montrer que si T satisfait (a), (b) et (c), alors elle est VB-contractante (voir par exemple Dedecker et Prieur (2007), Section 6.3). Des exemples bien connus de telles transformations sont:

(i) Les β-transformations $T(x)=\beta x-[\beta x]$ pour $\beta>1$.
(ii) $T(x)=a_kx+b_k$ sur I_k, avec $|a_k|>1$, où $(I_k)_{1\le k\le n}$ est une partition de $[0,1]$ formée d'intervalles disjoints.

(iii) $T(x) = a(x^{-1} - 1) - [a(x^{-1} - 1)]$ pour $a > 0$. Pour $a = 1$, c'est la transformation de Gauss.

Notons que lorsque $\beta = 2$, l'opérateur de Perron-Frobenius de la β-transformation est exactement celui donné dans (1.1). Notons aussi que, pour ces transformations uniformément dilatantes et lorsque f vérifie (1.6), le théorème limite central (4.5) ainsi que l'inégalité (4.6) peuvent être également obtenus en utilisant les estimées de $\|K^n(f)\|_\infty$ données dans Conze et Raugi (2003).

5. Un lemme

Avant d'écrire les preuves des théorèmes 3.1 et 3.2, on en donne l'un des principaux ingrédients.

Lemme 5.1. *Soit X une variable aléatoire positive. Soit c une fonction croissante et concave de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$. Pour tout p dans $[1, \infty]$, on a $\|c(X)\|_p \le c(\|X\|_p)$.*

Preuve. Lorsque $p = \infty$, l'inégalité est claire (la positivité et la croissance de c suffisent). Lorsque $p = 1$, l'inégalité est vraie également (la positivité et la concavité de c suffisent).

On suppose maintenant que $p \in]1, \infty[$. Soit $Y = (c(X)/\|c(X)\|_p)^{p-1}$. Clairement

$$\|c(X)\|_p = \|Y\|_1 \Big\| \frac{Y}{\|Y\|_1} c(X) \Big\|_1 = \|Y\|_1 \|c(X)\|_{1,\mathbb{Q}} \,,$$

où $\mathbb{Q}$ est la probabilité telle que $d\mathbb{Q}/d\mathbb{P} = Y/\|Y\|_1$ et $\| \cdot \|_{1,\mathbb{Q}}$ est la norme usuelle sur $\mathbb{L}^1(\mathbb{Q})$. En appliquant l'inégalité de Jensen à la fonction concave c et à la norme $\| \cdot \|_{1,\mathbb{Q}}$ on obtient que

$$\|c(X)\|_p \le \|Y\|_1 c\Big(\Big\| \frac{Y}{\|Y\|_1} X \Big\|_1 \Big) .$$

Puisque $\|Y\|_{p/(p-1)} = 1$, l'inégalité de Hölder donne $\|YX\|_1 \le \|X\|_p$. Comme c est croissante, on en déduit que

$$\|c(X)\|_p \le \|Y\|_1 c\Big(\frac{\|X\|_p}{\|Y\|_1} \Big) . \tag{5.1}$$

Comme c est concave, on a que, pour tout a dans $[0, 1]$, $(1-a)c(0)+ac(x/a) \le c(x)$. Puisque $c(0) \ge 0$, on en déduit que $ac(x/a) \le c(x)$. Le lemme en découle, en prenant $a = \|Y\|_1$ et $x = \|X\|_p$ dans (5.1).

6. Preuve des théorèmes 3.1 et 3.2

On commence par montrer le théorème 3.1. On rappelle un résultat qui découle directement de la proposition 2 dans Dedecker et Merlevède (2002). Si $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ est une suite strictement stationnaire et ergodique de variables aléatoires de carré intégrable, et si il existe $(a_k)_{k>0}$ une suite de réels positifs tels que

$$\sum_{i>0} \Big(\sum_{k=1}^{i} a_k \Big)^{-1} < \infty \quad \text{et} \quad \sum_{k>0} a_k \|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_2^2 < \infty \,, \tag{6.1}$$

alors la conclusion du théorème (3.1) a lieu. On vérifie en particulier que (6.1) est satisfaite dès que

$$\sum_{k>0} \frac{\|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_2}{\sqrt{k}} < \infty . \tag{6.2}$$

Pour le voir, il suffit de prendre $a_k^{-1} = \sqrt{k}\|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_2$ dans (6.1). Comme les quantités $\|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_2$ décroissent avec k, on en déduit que

$$\sum_{k=1}^{i} a_k \geq \frac{\sqrt{i}}{2\|\mathbb{E}(f(X_{[i/2]}) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_2} ,$$

et (6.1) découle facilement de (6.2). Pour terminer la preuve du théorème (3.1), il suffit donc de montrer que si $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ appartient à $G(\tau_2)$ et si f satisfait (1.5), alors (6.2) est vérifiée. Grâce à la propriété (2.2), on sait qu'il existe X_k^* de même loi que X_k et indépendante de $\mathcal{M}_0$ telle que $\|\mathbb{E}(d(X_k, X_k^*)|\mathcal{M}_0)\|_2 = \tau_2(k)$. Pour ce couplage, on a que

$$\|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_2 = \|\mathbb{E}(f(X_k) - f(X_k^*)|\mathcal{M}_0)\|_2 .$$

Puisque $c_w(f, \cdot)$ est le plus petit majorant concave de $w(f, \cdot)$, on a que

$$\|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_2 \leq \|\mathbb{E}(c_w(f, d(X_k, X_k^*))|\mathcal{M}_0)\|_2 \leq \|c_w(f, \mathbb{E}(d(X_k, X_k^*)|\mathcal{M}_0))\|_2 ,$$

la dernière inégalité provenant de l'inégalité de Jensen. On applique ensuite le lemme 5.1 avec $p = 2$, et on obtient que

$$\|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_2 \leq c_w(f, \|\mathbb{E}(d(X_k, X_k^*)|\mathcal{M}_0)\|_2) = c_w(f, \tau_2(k)) . \tag{6.3}$$

On en déduit que (6.2) a lieu dès que

$$\sum_{k>0} \frac{c_w(f, \tau_2(k))}{\sqrt{k}} < \infty .$$

Lorsque $\tau_2(k) \leq K\rho^k$, cette condition est vraie dès que (1.5) a lieu. La preuve du théorème 3.1 est complète.

On va à présent démontrer le théorème 3.2. En appliquant la proposition 2 dans Peligrad, Utev et Wu (2007), on a que, pour tout $t > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\max_{1\leq k\leq n} |S_k(f - \mu(f))| > t\Big) \leq 4\sqrt{e}\exp\Big(-\frac{t^2}{2n(\|f(X_1) - \mu(f)\|_\infty + A_n)^2}\Big) , \tag{6.4}$$

avec

$$A_n = 240\sum_{k=1}^{n} \frac{\|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_\infty}{\sqrt{k}} .$$

En procédant comme pour (6.3) (en prenant $p = \infty$ dans le lemme 5.1), on obtient que

$$\|\mathbb{E}(f(X_k) - \mu(f)|\mathcal{M}_0)\|_\infty \leq c_w(f, \tau_\infty(k)) .$$

On en déduit que

$$A_n \leq 240\sum_{k=1}^{n} \frac{c_w(f, \tau_\infty(k))}{\sqrt{k}} ,$$

et la constante C_n dans (3.2) en découle. Lorsque $\tau_\infty(k) \leq K\rho^k$, on voit que A_n est bornée dès que (1.6) a lieu. La preuve du théorème 3.2 est complète.

Remerciements. C'est en discutant avec Florence Merlevède, que je remercie ici, que j'ai compris comment déduire le principe d'invariance faible pour les transformations dilatantes de celui obtenu pour les chaînes de Markov associées.

References

[1] D. Bosq (1993), Bernstein's type large deviation inequalities for partials sums of strong mixing processes. *Statistics* **24**, 59-70.

[2] A. Broise (1996), Transformations dilatantes de l'intervalle et théorèmes limites. Études spectrales d'opérateurs de transfert et applications. *Astérisque* **238** 1-109.

[3] J.-P. Conze et A. Raugi (2003), Convergence of iterates of a transfer operator, application to dynamical systems and to Markov chains. *ESAIM Probab. Stat.* **7**, 115-146.

[4] J. Dedecker et F. Merlevède (2002), Necessary and sufficient conditions for the conditional central limit theorem. *Ann. Probab.* **30**, 1044-1081.

[5] J. Dedecker et F. Merlevède (2006), Inequalities for partial sums of Hilbert-valued dependent sequences. *Math. Methods Statist.* **15**, 167-206.

[6] J. Dedecker et C. Prieur (2005), New dependence coefficients. Examples and applications to statistics. *Probab. Theory Relat. Fields* **132**, 203-236.

[7] H. Hennion et L. Hervé (2001), Limit theorems for Markov chains and stochastic properties of dynamical systems by quasi-compactness. *Lecture Notes in Mathematics* **1766**, Springer.

[8] I. A. Ibragimov (1960), Asymptotic distribution of values of certain sums. *Vestn. Leningr. Univ.* **1**, 55-69.

[9] M. Kac (1946), On the distribution of values of sums of type $\sum f(2^k t)$. *Ann. Math.* **47**, 33-49.

[10] M. Maxwell et M. Woodroofe (2000), Central limit theorems for additive functionals of Markov chains. *Ann. Probab.* **28**, 713-724.

[11] M. Peligrad, S. Utev et W.-B. Wu (2007), A maximal $\mathbb{L}^p$-inequality for stationary sequences and its applications. *Proc. Amer. Math. Soc.* **135**, 541-550.

[12] M. Rosenblatt (1956), A central limit theorem and a strong mixing condition. *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **42**, 43-47.

[13] L. Rüschendorf (1985), The Wasserstein distance and approximation theorems. *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **70**, 117-129.

J. Dedecker, Laboratoire de Statistique Théorique et Appliquée
Université paris 6, 175 rue du Chevaleret 75013 Paris, France.
email: jerome.dedecker@upmc.fr