

# Approximation d'ensembles

Raphaël Lachière-Rey

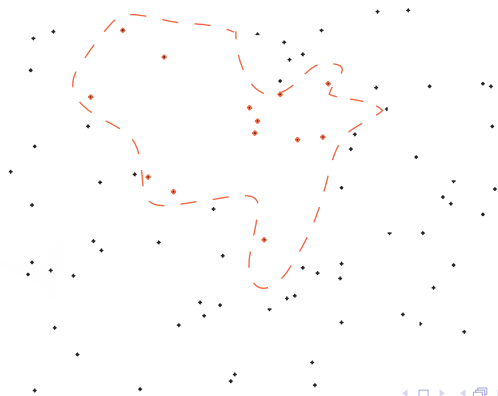
En collaboration with Giovanni Peccati, Université de Luxembourg,  
et Sergio Vega

Rentrée du MAP5, 5 octobre 2015



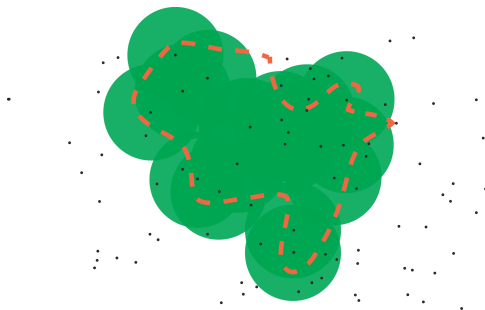
# Estimation d'ensembles

- $K$  est un ensemble inconnu de  $[0, 1]^d$
- $\mathcal{X}$  est un échantillonnage aléatoire du plan
- On dispose de l'information  $\{1_{x \in K}, x \in \mathcal{X}\}$
- Comment construire une bonne approximation  $K^{\mathcal{X}}$ ? Selon quels critères?



## Reconstruction par boules

Dans les années 80, Devroye & Wise proposent l'union de boules centrées sur  $\mathcal{X} \cap \mathcal{K}$ , le rayon tend vers 0 ni trop vite ni trop lentement.

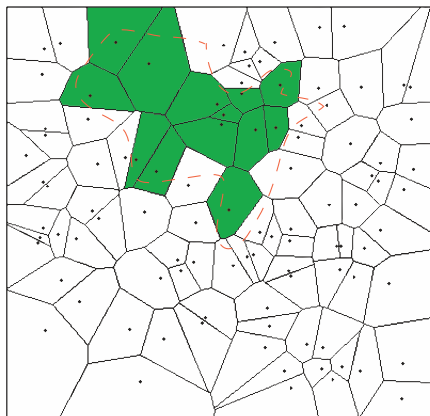


- Convergence de la forme (distance de Hausdorff) en  $(n/\log(n))^{-1/d}$ , où  $n$  est le nombre (moyen) de points. (Processus de Poisson ou points IID) pour les ensembles réguliers
- Estimation consistente du volume.

# Approximation Voronoi

Reconstruction de  $K$  avec

$$K^{\mathcal{X}} = \{x \in \mathbb{R}^d : x \text{ est plus proche de } \mathcal{X} \cap K \text{ que de } \mathcal{X} \cap K^c\}.$$

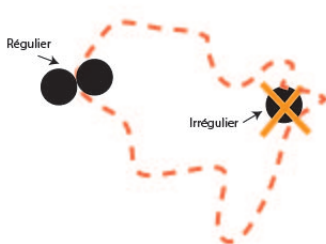


# Ensemble $r$ -régulier

Un ensemble est appelé  $r$ -régulier si l'on peut rouler une boule l'intérieur et à l'extérieur sans se décoller de la frontière.

Equivalent a

- $\partial A$  est une variété  $\mathcal{C}^1$  avec vecteur normal Lipschitzien.



# Enveloppe $r$ -convexe

Rodriguez-Casal '07 introduit l'approximation par enveloppe  $r$ -convexe, obtenue en retirant toutes les boules de rayon  $r$  qui ne touchent pas  $\chi \cap K$ .



Cette approximation a de bonnes propriétés si l'ensemble est  $r'$ -régulier avec  $r' < r$ . Si l'on ne connaît pas  $r'$ , il faut faire tendre  $r$  vers 0 avec le nombre de boules.

# Avantages et inconvénients des différentes méthodes

- ① Devroye and Wise (union de boules)
  - ▶ Ne requiert un échantillon qu'à l'intérieur
  - ▶ Consistent en forme et en volume pour les ensembles réguliers
  - ▶ Il faut choisir le rayon des boules, ni trop grand, ni trop petit
- ② Approximation Voronoi
  - ▶ Estimation sans biais du volume si l'input est un processus de Poisson (Heveling & Reitzner 2009) et très faible avec input IID (LR & Vega)
  - ▶ Intervalles de confiance en  $n^{-1/2+1/2d}$  (LR & Peccati)
  - ▶ Bonne approximation pour une distance de "forme" (la distance de Hausdorff) (LR & Vega) - pas de "trous" laissés au milieu de l'approximation
  - ▶ Bonnes vitesses de convergence même si l'ensemble est irrégulier (frontière auto-similaire) (LR & Peccati, LR & Vega)
  - ▶ Nécessité d'échantillonner aussi à l'extérieur
- ③ Enveloppe  $r$ -convexe (Rodriguez-Casal 2007)
  - ▶ Ne nécessite des échantillons qu'à l'intérieur
  - ▶ Excellente vitesse de convergence en "forme" pour les ensembles réguliers - Rodriguez-Casal 2007
  - ▶ Projets : Approximation du volume d'ensembles réguliers? Optimalité?